I.N.P. **Septembre 2009**

◕ ☢ ◕ Fonctions d'une Variable Réelle – Feuille d'Exercices Semaine 1. ◕ ☢ ◕

1. Préliminaires.

Exercice 1. *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions majorées sur X. Montrer que* $\sup_{x\in X} f(x) + g(x) \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x)$. *En considérant $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x), X = \mathbb{R}$ montrer que l'inégalité peut parfois être stricte.*

Exercice 2. *Pour $x \in \mathbb{R}$ on admet qu'il existe un unique entier relatif n vérifiant $n \leq x \leq n+1$. C'est la partie entière de x, on la note $E(x)$. Montrer que :*
- $x \leq y \implies E(x) \leq E(y)$.
- $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in \mathbb{R} \ :\ E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
- *Montrer que* $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star \ :\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1/2\sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. *En déduire la partie entière de* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

Exercice 3. • *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie majorée. Si* $\sup(A) > 0$ *montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $a > 0$.*
• *Soient A, B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et préciser* $\sup(A \cup B)$ *et* $\inf(A \cup B)$.
• *Si $B \subset A$ et A bornée Montrer que B est bornée et comparer* $\sup A, \sup B, \inf A, \inf B$.

Exercice 4. • *Si f est impaire et $0 \in A$ montrer que $f(0) = 0$.*
• *Montrer que toute fonction $f : A \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique sous la forme $f = g + h$ avec g paire et h impaire.*

Exercice 5. • *Les fonctions* $f(x) = \cos(x^2)$ *et* $g(x) = \sin(x^2)$ *sont-elles périodiques ?*
• *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $\notin \mathbb{Q}$ quel est l'ensemble des périodes de f ?*

Exercice 6. • *Justifier les affirmations : la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ est surjective mais pas injective, par contre la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est ni surjective ni injective. Enfin la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est bijective.*
• *Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F, g : F \to G$. Si $g \circ f$ est injective montrer que f est injective. Si $g \circ f$ est surjective montrer que g est surjective.*
• *Montrer que la composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).*
• *La somme, le produit de deux bijections est-elle encore une bijection ?*

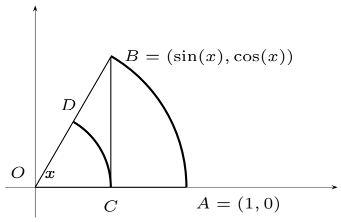
2. Limites (1).

Exercice 7. *Que dire des fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant une des conditions ci-dessous ?*

a) $\forall\, \eta > 0,\ \exists \varepsilon > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$
b) $\exists \varepsilon > 0,\ \forall\, \eta > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$
c) $\exists \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$
d) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall\, \eta > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$
e) $\exists \eta > 0,\ \forall\, \varepsilon > 0\ :\ |x-2| < \eta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$
f) $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, B > 0\ :\ x > B \implies f(x) > A.$
g) $\forall\, B > 0,\ \exists\, A \in \mathbb{R}\ :\ x > B \implies f(x) > A.$
h) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0 x < A \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$
i) $\forall A \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 x < A \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$

Exercice 8. • *Montrer que* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.
• *Pour* $a \in \mathbb{R}$ *calculer* $\lim_{x\to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$, *puis* $\lim_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a},\ n \geq 4.$

Exercice 9. *On définit pour* $x \in \mathbb{R}$ *la fonction sinus de manière trigonométrique (voir figure) but de cet exercice est de montrer « proprement » la formule classique* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



En observant bien la figure, montrer que

$$\frac{x\cos^2(x)}{2} \leq \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \leq \frac{x}{2}, \quad \forall\, 0 < x < \pi/2.$$

(« rappel » : l'aire d'un secteur angulaire d'angle α *et de rayon* r *est* $\alpha r^2/2$*). Conclure.*

5 septembre 2009 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr