

A rédiger pour le dernier TD de la semaine du 5/10 au 10/10.

Exercice 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\log \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \log(x/2) \right) = ?$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue au point $x = -1$ et satisfaisant à l'équation fonctionnelle $f(2x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que f est constante.

1) Montrer que $f\left(\frac{t-1}{2}\right) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2) Soit $t \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(u_n)_n$ par : $u_0 = t$, $u_{n+1} = \frac{u_n-1}{2}$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que si la suite $(u_n)_n$ converge vers a alors $a = -1$.

b) Montrer que la suite $(1+u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Conclusion ?

c) Montrer par récurrence que $f(t) = f(u_n)$ pour tout entier n , puis que $f(t) = f(-1)$ et conclure.