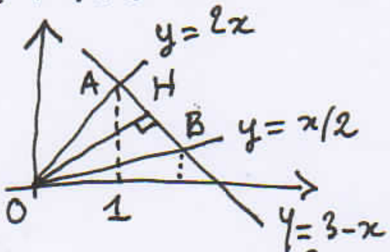
Exercice 1 : Il s'agit de déterminer l'aire du triangle de sommets $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$



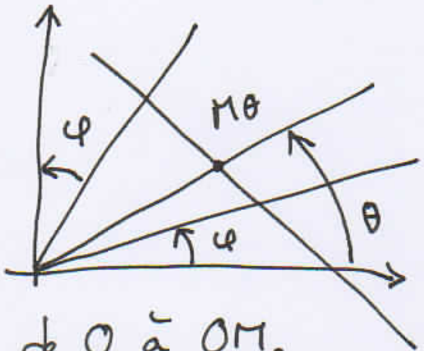
① Avec un peu de géométrie élémentaire

$$\text{aire}(T) = \frac{AB.OH}{2} = \frac{3}{2}$$

② On intègre par tranches :

$$\text{aire}(T) = \int_0^1 \int_{x/2}^{2x} dy\, dx + \int_1^2 \int_{x/2}^{3-x} dy\, dx = \dots = \frac{3}{2}$$

③ Plus "sportif", on passe en polaires :



Il est clair que $\tan(\varphi) = 1/2$

θ va donc varier de $\text{Artan}(1/2)$ à $\frac{\pi}{2} - \text{Artan}(1/2) = \text{Artan}(2)$

Pour $\theta \in [\text{Artan}(1/2), \text{Artan}(2)]$, r varie de O à OM_θ et un petit calcul nous donne

$$M_\theta = \left(\frac{3}{1+\tan\theta}, \frac{3\tan\theta}{1+\tan\theta} \right)$$

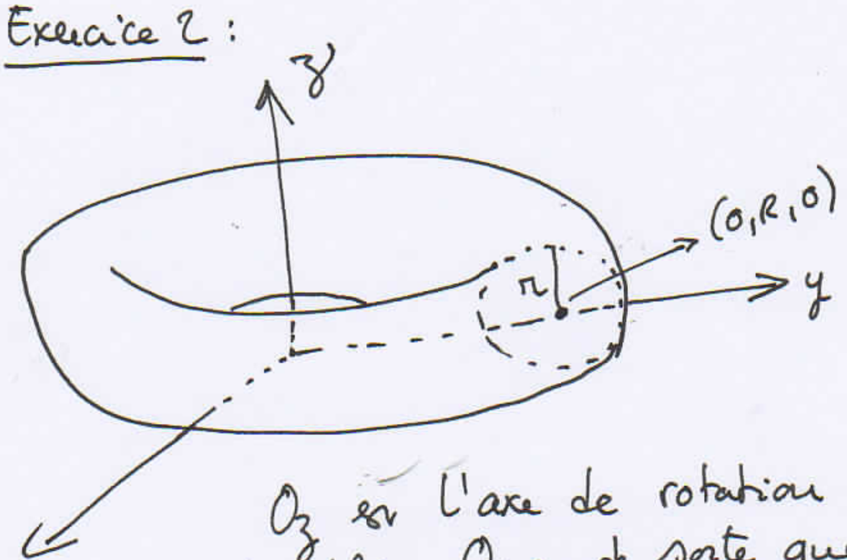
Soit $OM_\theta = \frac{3}{1+\tan\theta}\sqrt{1+\tan^2\theta}$ et donc :

$$\text{aire}(T) = \int_{\text{artan}(1/2)}^{\text{artan}(2)} \int_0^{3\sqrt{1+\tan^2\theta}/1+\tan\theta} r\,dr \; d\theta$$

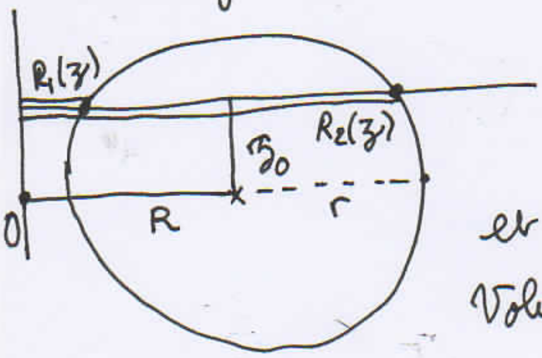
$$= \int_{\text{artan}(1/2)}^{\text{arctan}(2)} \frac{9}{2} \frac{1+\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^2} d\theta$$

$$\overset{u=\tan\theta}{=} \int_{1/2}^{2} \frac{9}{2} \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 2 :



Oz est l'axe de rotation et on place le cercle dans le plan Oyz de sorte que le centre du cercle soit $(0,R,0)$. Si on projète le tore sur Oz on obtient l'intervalle $[-r,r]$; pour $z=z_0$ fixé dans $[-r,r]$ la section du tore par le plan $O_{x,y}, z=z_0$ est une couronne circulaire C_z de rayons $R_1(z) < R_2(z)$. On trouve :



$$R_1(z) = R - \sqrt{r^2 - z^2}$$
$$R_2(z) = R + \sqrt{r^2 - z^2}$$

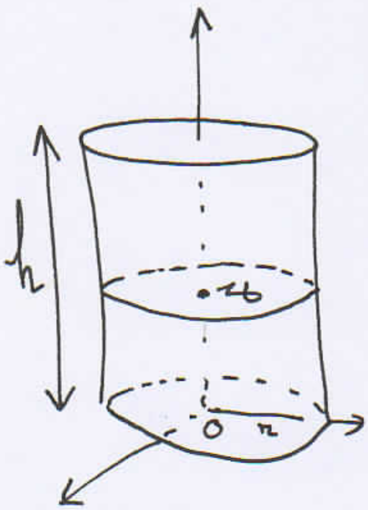
et finalement

$$\text{Volume}(\mathcal{T}) = \iiint_{\mathcal{T}} dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{-r}^{r} \left(\iint_{C_z} dy\,dx \right) dz$$
$$= \int_{-r}^{r} \left(4\pi R \sqrt{r^2 - z^2}\, dz \right)$$
$$= 2\pi^2 R r^2$$

Rq : on peut aussi paramétrer le tore de la manière suivante et le calcul est + simple,

$$\mathcal{T} = \left\{ C(Re^{i\theta}, r), \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

Exercice 3



Pour le volume du cylindre, on passe en coordonnées cylindriques

$$\mathcal{C} = \left\{ (t\cos\theta, t\sin\theta, z), \ 0\le t\le r,\ 0\le z\le h,\ 0\le\theta\le 2\pi \right\}$$

ce qui nous donne

$$\text{Aire}(\mathcal{C}) = \iiint_{\mathcal{C}} dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\int_0^{h} t\,dt\,d\theta\,dh$$

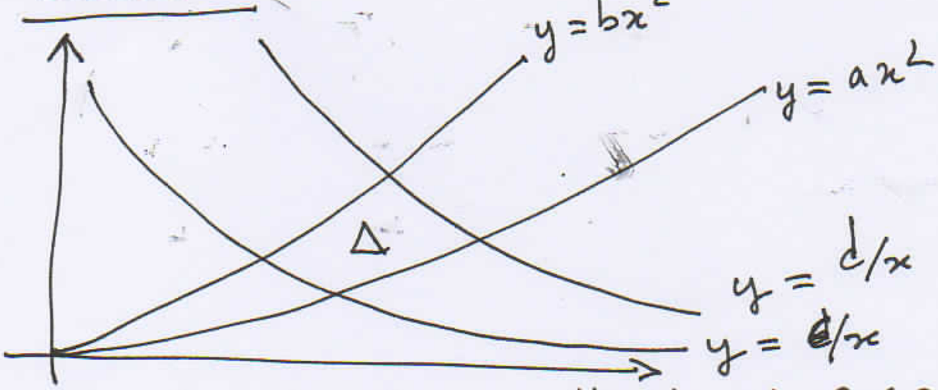
$$\boxed{= \pi r^2 h.}$$

Maintenant il faut calculer

$$\iiint_{\mathcal{C}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^h \left(\iint_{D(\theta, z)} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \right) dz$$

$$= \int_0^h z \int_0^r\int_0^{2\pi} \rho^2\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^h 2\pi z\,\frac{r^3}{3} = \boxed{\frac{\pi r^3}{3}\cdot h^2}$$

Exercice 4 :



$\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a \le \frac{y}{x^2} \le b \ \& \ c \le xy \le d\}$, on fait donc le changement $\varphi(x,y) = \left(u = \frac{y}{x^2},\ v = xy\right)$ le det. de la matrice Jacobienne est

$$\begin{vmatrix} -2y/x^3 & 1/x^2 \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2} = -3u \neq 0$$

car $\varphi(\Delta) = [a,b]\times[c,d]$ on a donc

$$\iint_{\Delta} dx\,dy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{du\,dv}{3u} = \boxed{\frac{d-c}{3}\log\left(\frac{b}{a}\right)}$$