Université Paul Sabatier 2008/09.

L3 MAPES, ANALYSE, Feuille 7 (séries de Fourier).

Exercice 1. *1) Calculer les coefficients de Fourier associés à la périodisée f de la fonction $x \mapsto |x|$. (Solution : $a_n(f) = \frac{2}{\pi n^2}\{(-1)^n - 1\}$.)*

a) En déduire que pour $x \in [-\pi,\pi]$, $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2p+1)x\big)}{(2p+1)^2}$.

b) En déduire les formules

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2) Soit f la périodisée de la fonction valant $+1$ sur $[0,\pi[$ et -1 sur $[-\pi,0[$. Calculer ses coefficients de Fourier et donner, suivant x, la valeur de $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\sin\big((2p+1)x\big)}{2p+1}$. Quelles autres sommes peut-on en déduire ?

3) Calculer les coefficients de Fourier de la périodisée de période 2π de la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$, avec $|b-a| < 2\pi$. Quelles sommes peut-on en déduire ?

4) Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0,\pi]$. En déduire que $\sum_0^\infty (-1)^p/(2p+1)^3 = \pi^3/32$.

5) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique égale à e^{ax}, $(a \neq 0)$ sur $[0,2\pi[$. En déduire $\sum_{n\geq 1} a/(a^2+n^2)$ et retrouver $\sum_n 1/n^2 = \pi^2/6$. Enfin montrer que $\lim_{a\to\infty}\sum_{n\geq 1} a/(a^2+n^2) = \pi/2$.

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique égale à $\sqrt{x}$ sur $[0,\pi]$.*

1) Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que f est développable en série de Fourier ?

2) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, montrer que pour tout $x > 0$

$$G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt.$$

En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ existe,est finie et strictement positive.

3) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$, à l'aide de la question précédente montrer que $a_n = 0(n^{-3/2})$.

4) En déduire que f est développable en série de Fourier.

Exercice 3. *Soit $f : \overline{D(0,1)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \to \mathbb{C}$ vérifiant :*

- *f est nulle sur le cercle unité,*
- *f est développable en série entière sur $D(0,1)$,*
- *f est continue sur $\overline{D(0,1)}$.*

On se propose de montrer qu'alors f est identiquement nulle. Pour cela si $0 < r < 1$ on considère

$$g_r(\theta) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta}$$

1) Avec les séries de Fourier, montrer les formules de Cauchy

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

2) En déduire les inégalités de Cauchy

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad |a_n| r^n \leq \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

3) Avec l'uniforme continuité de f, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $1 > \eta > 0$ tel que $1-|z| \leq \eta$ implique $|f(z)| \leq \varepsilon$.

4) Conclure.

Exercice 4. *Montrer que* $f(x) = \cos(\cos(x))ch(\sin(x)) = 2^{-1}\left(\cos(e^{ix}) + \cos(e^{-ix})\right)$*, en déduire un développement de* f *en série trigonométrique ; montrer que ce développement est celui de Fourier de* f *et en déduire la valeur des intégrales* $\int_0^\pi \cos(\cos(x))ch(\sin(x))\cos(nx)dx,\ n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. *On considère une suite d'entiers* $(a_n)_n \subset \mathbb{Z}$ *telle que la série entière* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *ait un rayon de convergence supérieur ou égal à* 1 *et soit bornée sur le disque unité ; montrer que* f *est un polynôme (considérer pour* $0 < r < 1$ *les fonctions* $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$*, calculer leur coefficients de Fourier, appliquer Parceval...).*