L3 MAPES, ANALYSE, Feuille 7 (analyse vectorielle).

Exercice 1. *Appliquez la formule de Green pour évaluer l'aire des régions $\mathscr{R}$ suivantes :*

1. $\mathscr{R}$ est le domaine borné délimité par les courbes $y = x^2, x = y^2, 8xy = 1$.

2. $\mathscr{R}$ est délimitée par la courbe d'équations $x(t) = a\cos^3(t), y = a\sin^3(t), a > 0$ et $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 2. *Appliquez la formule de Green pour montrer que*

$$\iint_{\{x^2/a^2+y^2/b^2\leq 1\}} (x^4 + y^4)dxdy = \frac{\pi ab(a^4 + b^4)}{8}.$$

Exercice 3. *Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma y^2dx + x^2dy$ ou Γ est le quart de l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ a, b > 0$, reliant $A = (a, 0)$ à $B = (0, b)$. On commencera par un calcul direct puis on retrouvera le résultat $(2ab(a-b)/3)$ en appliquant la formule de Green-Riemann sur le compact délimité par $\Gamma \vee [B, (0, 0)] \vee [(0, 0), A]$.*

Exercice 4. *On considère la forme différentielle ω définie sur l'ouvert $\mathscr{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par*

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

(1) *Montrer que ω est fermée sur $\mathscr{U}$; le cours nous permet-il d'affirmer que ω est exacte sur $\mathscr{U}$? et sur $\mathscr{U}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0\}$, ou $\mathscr{U}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x < 0\}$?*

(2) *Déterminer les primitives de ω sur $\mathscr{U}_1$ puis sur $\mathscr{U}_2$.*

(3) *En déduire que ω ne peut être exacte sur $\mathscr{U}$.*

(4) *Soit $\epsilon > 0$, calculer $\int_{C_\epsilon} \omega$ ou C_ϵ est le cercle $C(0, \epsilon)$ orienté positivement ; en déduire un autre preuve de la non exactitude de ω.*

Exercice 5. *Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a, b])$ deux fonctions convexes telles que*

$$f(a) = g(a),\ f(b) = g(b),\ \forall\, t \in [a, b]\ :\ g(t) \leq f(t).$$

L'objectif est de montrer que

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}dt \leq \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)}dt.$$

(1) *Faire un dessin, commentaire ?*

(2) *On suppose f et g de classe $\mathscr{C}^2$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange a $\psi(t) = (1 + t^2)^{1/2}$, montrer que $(1 + g'(t)^2)^{1/2} \geq (1 + f'(t)^2)^{1/2} + (g'(t) - f'(t))\psi'(f'(t))$ sur $[a, b]$ et conclure.*

(3) *Si les fonctions ne sont pas de classe $\mathscr{C}^2$ reprendre le raisonnement précédent en utilisant la formule de la moyenne.*

Exercice 6. *1) Montrer que dans $\mathbb{R}^d$, le plus court chemin reliant deux points est la ligne droite.*

2) Montrer que le plus court chemin reliant deux point sur la sphère S de $\mathbb{R}^3$ est un méridien (se placer en coordonnées sphériques).

Exercice 7. *On considère la forme différentielle ω définie sur l'ouvert $\mathscr{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par*

$$\omega(x, y) = \frac{3x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx - \frac{3y^3 + x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy.$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux manières différentes l'intégrale curviligne $\int_{\overset{\frown}{AB}} \omega$ où $\overset{\frown}{AB}$ est le quart de l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ orienté positivement.

(1) *On va montrer que* ω *est exacte sur* $\mathscr{U}$.

(a) *Montrer que* ω *est fermée sur* $\mathscr{U}$, *peut-on à ce niveau affirmer quelle est exacte sur* $\mathscr{U}$ *?*

(b) *Si* ω *admet une primitive* U *sur* $\mathscr{U}$ *montrer qu'il existe une fonction* $\phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^\star)$ *telle que*

$$U(x,y) = \int \frac{3x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \varphi(y).$$

(c) *Avec le changement de variables* $t = \sqrt{x^2+y^2}$ *montrer que l'on peut choisir* $U(x,y) = (x^2 - y^2)\sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y)$.

(d) *A l'aide de* $\partial U/\partial y$ *déterminer* φ, *en déduire que* ω *est exacte sur* $\mathscr{U}$ *et conclure.*

(2) *Pour* $0 < \epsilon < \min(a,b)$ *on considère le circuit* $\gamma_\epsilon = AB \vee [(0,b),(0,\epsilon)] \vee C_\epsilon \vee [(\epsilon,0),(a,0)]$ *ou* C_ϵ *est le quart du cercle* $C(0,\epsilon)$ *situé dans le premier quart de plan.*

(a) *Montrer que* $\int_{\gamma_\epsilon} \omega = 0$.

(b) *Montrer que* $\int_{\gamma_\epsilon} \omega = -(a^3+b^3) + 2\epsilon^3 - \int_{C_\epsilon} \omega$.

(c) *En déduire que* $\int_{\widehat{AB}} \omega = -(a^3+b^3)$.