Intégrales uniformément convergentes.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente. Elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Posons $I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x \, dx$. Montrer que I est continue sur $[0, \infty[$, que $I'(\alpha) = -\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\sin\alpha x \, dx$ puis, à l'aide d'une intégration par parties que $I'(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} I(\alpha)$. En déduire la valeur de $I(\alpha)$.

3. On pose $J(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx$. ⓐ Montrer que cette intégrale est convergente. ⓑ Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx$ est uniformément convergente sur $[0, a]$ pour tout $a \geq 0$. En déduire que

$$J'(\alpha) = 2\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx - 2\alpha\int_0^{\infty} \frac{e^{-\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}}{x^2}dx$$

et, par un changement de variable dans la seconde intégrale que $J'(\alpha) = 0$. ⓒ Calculer $J(\alpha)$ et $\int_0^{\infty} e^{-(x^2+x^{-2})}dx$.