L3 MAPES, ANALYSE, Feuille 4 (fonctions définies par des intégrales).

Exercice 1. *Calculer pour $a > 1, b > 1$ l'intégrale* $\displaystyle\int_0^\pi \log\left(\frac{b-\cos(t)}{a-\cos(t)}\right)dt$. *(on pourra commencer par étudier la fonction $u \mapsto \int_0^\pi \log(u-\cos(t))dt$, montrer qu'elle est dérivable sur $]1,+\infty[$ pour en déduire une forme explicite...).*

Exercice 2. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction continue nulle en dehors d'un intervalle compact $[a,b]$ et $\tilde{f}$ la fonction définie par* $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$.

1) Montrer que $\tilde{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2) Montrer que $\tilde{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que si $\tilde{f}$ est à support compact, alors $f \equiv 0$.
4) Montrer que si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3. *Quels que soient les nombres réels $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on pose $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta dx$.*
1) Montrer que $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$,
2) Calculer $B(\alpha,0)$,
3) Montrer que $(\alpha+1)B(\alpha,\beta) = \beta B(\alpha+1,\beta-1)$ lorsque $\beta \geq 1$, puis $B(\alpha+1,\beta)(\alpha+\beta) = \alpha B(\alpha,\beta)$ et en déduire que $B(\alpha+1,\beta+1)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) = \alpha\beta B(\alpha,\beta)$,
4) Calculer $B(m,n)$ pour tout $m,n \in \mathbb{N}$,
5) Exprimer $\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(t)\sin^\beta(t)dt$ lorsque α et $\beta \geq 1$ à l'aide de la fonction B,
6) Préciser ce résultat lorsque $\alpha = 2m+1$ et $\beta = 2n+1$, $m,n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, pour $x \in \mathbb{R}^+$ on pose*

$$u_n(x) = \left(\int_0^x f(t)^n dt\right)^{1/n}, \quad M(x) = \sup_{t\in[0,x]} |f(t)|.$$

1) Montrer que $0 \leq u_n(x) \leq M(x) \cdot x^{1/n}$.
2) Montrer que pour tout $x > 0, \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $u_n(x) \geq \delta^{1/n}(M(x)-\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}^\star$.
3) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = M(x)$.

Exercice 5. *Notons $\phi(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha-\cos x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.*
1) Montrer que $\phi(\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$ via le changement de variable $t = \tan(x/2)$,
2) Calculer $\int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2}$ (dériver $\phi(\alpha)$),
3) Montrer que $\int_0^\pi \log\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)dx = \pi\log\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$ lorsque $a,b > 1$ (intégrer $\phi(\alpha)$ entre a et b).

Exercice 6. *On pose, pour tout $0 < x < 1$ et $\alpha > 0$, $g(x,\alpha) = (x^\alpha - 1)/\log x$.*
1) Montrer que $\lim_{x\to 0} g(x,\alpha) = 0$ et que $\lim_{x\to 1} g(x,\alpha) = 1$.
2) Montrer que g ainsi définie est continue sur $[0,1]\times]0,\infty[$. On devra montrer que $\lim_{(x,\alpha)\to(0,\alpha_0)} g(x,\alpha) = 0$ et que $\lim_{(x,\alpha)\to(1,\alpha_0)} g(x,\alpha) = \alpha_0$ pour tout $\alpha_0 > 0$. 3) On pose $\psi(\alpha) = \int_0^1 g(x,\alpha)dx$. Montrer que ψ est continue pour $\alpha > 0$.
4) Calculer $D_2 g(x,\alpha)$ et monter que l'on peut dériver ψ sous le signe d'intégration.