Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1
Feuille de TD 2008-3

L'ensemble triadique de Cantor. Il est noté C et défini de la façon suivante : $C_0 = [0,1]$, $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,5/9] \cup [6/9,1]$ et l'on continue ainsi, C_{k+1} est l'ensemble obtenu à partir de C_k en enlevant les tiers médiants des intervalles constituant C_k.

Pour numéroter les intervalles constituant les C_k nous posons $C_1 = I_0 \cup I_2$, $C_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ et, d'une manière générale, si C_k contient un intervalle $I_{w_1 w_2 \ldots w_k}$ avec $w_i = 0$ ou 2, les deux intervalles obtenus en enlevant le 1/3 médiant seront notés $I_{w_1 w_2 \ldots w_k 0}$ pour celui de gauche et $I_{w_1 w_2 \ldots w_k 2}$ pour celui de droite. L'ensemble triadique de Cantor est

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

1. Montrer que C est un ensemble compact, non vide et de mesure nulle.

Soit $x \in C$. Par construction de cet ensemble il existe une suite $w = (w_k)$ constituée de 0 ou de 2 telle que $x \in I_{w_1 w_2 \ldots w_k}$ pour tout k. Nous dirons que x a pour adresse w.

2. Montrer que l'adresse réalise réalise une bijection de C sur l'ensemble des suites $w = (w_k)$ constituées de 0 ou de 2. En déduire que C possède la puissance du continu (considérer l'application qui à une adresse w associe la suite b obtenue en remplaçant les 2 par des 1).

3. Soit $x \in C$ et soit w son adresse. Montrer que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{3^k}.$$

L'ensemble triadique de Cantor permet la construction d'un fameux contre-exemple : *l'escalier du diable*. Il s'agit d'une fonction continue $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui croît de $0 = D(0)$ à $1 = D(1)$ et dont la dérivée existe et est nulle presque partout sur $[0,1]$. Notons d cette dérivée et prolongeons sa définition à $[0,1]$ tout entier par n'importe quel moyen. On obtient ainsi une fonction intégrable au sens de Riemann et

$$\int_0^x d(t)dt = 0 \neq D(x)$$

pour tout $x > 0$ alors que $D'(x) = d(x)$ pour presque tout x.

La construction de D se fait par récurrence : $D_0(x) = x$ et

$$D_{k+1}(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} D_k(3x) & \text{si } 0 \le x \le 1/3, \\ 1 & \text{si } 1/3 \le x \le 2/3, \\ 1 + D_k(3x-2) & \text{si } 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

4. Tracer D_1 et D_2.

5. On note $\|f\| = \sup_{0 \le t \le 1} |f(t)|$ la norme uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $\|D_{k+1} - D_k\| \le \|D_k - D_{k-1}\|/2$ et en déduire que la suite D_k converge vers une fonction continue D. Montrer que D croît de 0 à 1 sur l'intervalle $[0,1]$ et que sa dérivée est nulle sur $[0,1] \setminus C$.