Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1
Feuille de TD 2008-2

1. Montrer, en considérant des sommes de Riemann, que les fonctions suivantes sont intégrables au sens de Riemann :
   (a) $f(x) = x$, $x \in [a, b]$,
   (b) Une fonction en escalier sur un intervalle compact (considérer tout d'abord le cas de $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et 1 sinon).

2. Notons $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $r(x) = 0$ si x est irrationnel et $1/q$ si $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre-eux. Monter que r est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel. Indication : si $p_n/q_n \to r \notin \mathbb{Q}$ alors $q_n \to \infty$. Montrer que r est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle compact.

3. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

   Soit E un espace vectoriel réel muni d'un semi-produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$ et de la semi-norme associée $\|.\|$. Pour tout u et $v \in E$ on a :
   (a) $u \to \langle u, v \rangle$ est linéaire,
   (b) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
   (c) $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle \geq 0$.

   Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \, .$$
   Indication : considérer le trinôme en λ donné par $\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

   Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz
   $$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \int_a^b |g(x)|^2 \, dx.$$

4. **Inégalité de Hölder.**

   Soient p et $q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit qu'ils sont conjugués). Nous allons montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q \right)^{1/q}$$
   (inégalité de Hölder).
   (a) Soient u, $v \in [0, +\infty[$, montrer que
   $$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$
   Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme.
   (b) En déduire l'inégalité de Hölder lorsque $\sum_{k=1}^{n} \mid u_k \mid^p = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} \mid v_k \mid^q = 1$.

(c) En posant $| u'_k |= \dfrac{| u_k |}{(\sum_{k=1}^n | u_k |^p)^{1/p}}$ et $| v'_k |= \dfrac{| v'_k |}{(\sum_{k=1}^n | v_k |^q)^{1/q}}$, montrer l'inégalité de Hölder dans le cas général.

(d) Démontrer que si f et g sont deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Indication : écrire les intégrales précédentes comme limites de sommes de Riemann.

5. **Inégalité de Minkowski.** Soit $p \in [1, +\infty[$. Nous allons montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n | u_k + v_k |^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n | u_k |^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n | v_k |^p\right)^{1/p}.$$

Noter que le cas $p = 1$ est trivial. On supposera donc que $p > 1$.

(a) Montrer que $| u + v |^p \leq | u || u + v |^{p-1} + | v || u + v |^{p-1}$ pour tout u, $v \in \mathbb{R}$.

(b) Appliquer l'inégalité de Hölder à p et $q \in]1, +\infty[$ conjugués et conclure.

(c) Démontrer que si f et g sont deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$ alors

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Indication : écrire les intégrales précédentes comme limites de sommes de Riemann.

6. **Exercices de révision.** Donner les domaines de définition et les primitives des fonctions suivantes :

$x^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1,$	$x^{-1},$	$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$
$\sin x,$	$\cos x,$	$\tan x,$
$1/\sin x,$	$1/\cos x,$	$1/\tan x,$
$a^x,\ a > 0,$	$\exp x,$	$\log x,$
$\sinh x,$	$\cosh x,$	$\tanh x,$
$(a^2 - x^2)^{-1/2},$	$(x^2 \pm a^2)^{-1/2},$	$(x^2 + a^2)^{-1},$
$(x^2 - a^2)^{-1},$	$(x^2 \pm a^2)^{1/2},$	$(a^2 - x^2)^{-1/2}.$

7. **Fractions rationnelles.** Calculer les primitives de $\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3}$ et $\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2x+4)^2}$.

8. **Sommes de Riemann.**

(a) Exprimer $\int_0^1 x^2 dx$ à l'aide de sommes de Riemann. En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}.$$

(b) Démontrer, en utilisant la méthode de l'exercice précédent, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sin(x/n) + \sin(2x/n) + \ldots + \sin((n-1)x/n)\right) = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

9. **Inégalités.**

   (a) Montrer que $2x/\pi \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$ et en déduire que $x^2/\pi \leq 1 - \cos x \leq x^2/2$ pour de tels x.

   (b) Montrer que $\left|\int_0^1 \frac{\cos x}{x+1}\right| dx \leq \log 2$.

10. **Théorème de la moyenne.** Montrer qu'il existe $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$ pour lesquels

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x^2+1} = \frac{2}{\pi(\xi_1^2+1)} = \frac{\pi \sin(\pi \xi_2)}{4}.$$

11. **Intégration par parties.** Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on pose $w(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ que nous allons calculer.

   (a) Montrer que $w(m, n) = w(n, m)$,

   (b) Calculer $w(m, 0)$,

   (c) Calculer $w(m, n)$ (intégrer par parties),

   (d) Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} t \sin^{2n+1} t dt$ lorsque $m, n \in \mathbb{N}$ (poser $x = \sin^2 t$),

   (e) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \sin^p t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^p t dt$ et calculer ces intégrales,

   (f) Calculer $\int_1^x t^n \log t dt$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

12. **Changements de variable.**

   (a) $\int_0^a x^2 e^{\sin(x^3)} \cos(x^3) dx = (e^{\sin(a^3)} - 1)/3$,

   (b) $\int_0^1 \frac{arctanx}{1+x^2} dx = \pi^2/32$,

   (c) Calculer $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2} ds$ via le changement de variable $t = 1/s$. Conclusion ?

   (d) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \pi/3$,

   (e) $\int_{-2}^2 \frac{1}{16-x^2} dx = (\log 3)/4$,

   (f) $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{u} \sinh^2(\sqrt{u})} du$ avec $x > 0$,

   (g) $\int_0^1 \frac{1}{(3+2x-x^2)^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{12}$,

   (h) $\int_a^b \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$ (on précisera pour quelles valeurs de a et b cette intégrale est définie).