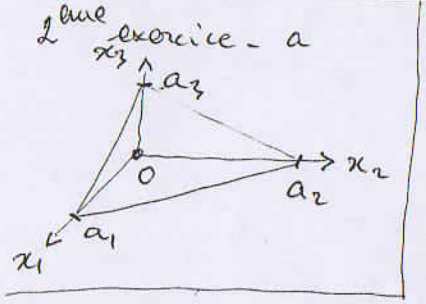
Corrigé de l'examen. Analyse 1. Mapes. 2008.

(1)

1er exercice. Soit $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\frac{\partial f}{\partial x} : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ existe et soit continue. Alors $F(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$ est dérivable et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$. Preuve. Par le théorème de Heine, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continue sur $[a,b]\times[c,d]$ et donc $\forall \varepsilon>0\ \exists \eta(\varepsilon)>0\ \forall t,t',x,x'\ \|(t,x)-(t',x')\| \le \eta(\varepsilon) \Rightarrow |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t',x')| \le \varepsilon$. Montrons que $\lim_{x'\to x} \frac{F(x')-F(x)}{x'-x} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$. Soit $\varepsilon>0$; prenons $\eta = \eta(\frac{\varepsilon}{b-a})$ du th. de Heine. Par le théorème des accroissements finis on a $\left|\frac{F(x')-F(x)}{x'-x} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt\right| = \left|\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,c) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt\right| \le \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| dt$ où c est dans l'intervalle d'extrémités x et x'. Donc si $|x-x'| \le \eta$ on a $\|(t,c)-(t,x)\| \le \eta$ et donc $\int_a^b |\ldots\ldots|\,dt \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \varepsilon$, cqfd.

2ème exercice. a



b. Lorsque $x \in S_a^{(3)}$ on a $0 \le x_3 \le a_3$ et pour x_3 fixé, $(x_1,x_2) \in S^{(2)}_{(a_1(1-\frac{x_3}{a_3}),\, a_2(1-\frac{x_3}{a_3}))}$. Par Fubini on obtient donc

$$V_a^{(3)} = \int_0^{x_3} S^{(2)}_{(a_1(1-\frac{x_3}{a_3}),\, a_2(1-\frac{x_3}{a_3}))}\,dx_3$$

$$= \int_0^{x_3} \underbrace{\frac{1}{2} a_1 a_2 \left(1-\frac{x_3}{a_3}\right)^2}_{\text{aire d'un triangle}} dx_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{6}.$$

b. $\Omega \xrightarrow{\varphi} \varphi(\Omega) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, φ un difféomorphisme sur $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, f intégrable au sens de Riemann. Alors $f\circ\varphi$ est intégrable au sens de Riemann et $\int_\Omega f\circ\varphi(u)\,|J_\varphi(u)|\,du = \int_{\varphi(\Omega)} f(x)\,dx$ où $J_\varphi(u) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)$.

c. On pose $\varphi(u) = \begin{pmatrix} a_1 u_1 \\ \vdots \\ a_n u_n \end{pmatrix}$ et $\Omega = S_1^{(n)}$ de sorte que $\varphi(\Omega) = \varphi(S_1^{(n)}) = S_a^{(n)}$. φ est linéaire bijective et $J_\varphi(u) = a_1 \cdots a_n$ d'où

$$V_a^{(n)} = \int_{S_a^{(n)}} dx_1\cdots dx_n = \int_{S_1^{(n)}} a_1\cdots a_n\,du_1\cdots du_n = a_1\cdots a_n V_1^{(n)}.$$

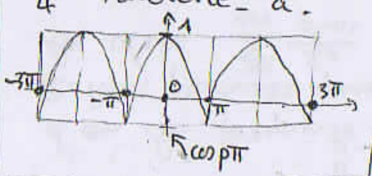
d. Si $x \in S_a^{(n)}$ alors $0 \le x_n \le a_n$ et $\frac{x_1}{a_1} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} \le 1 - \frac{x_n}{a_n}$ d'où

$$V_a^{(n)} = \int_{S_a^{(n)}} dx_1\cdots dx_n = \int_0^{x_n} dx_n \int_{S^{(n-1)}_{(a_1(1-\frac{x_n}{a_n}),\ldots,a_{n-1}(1-\frac{x_n}{a_n}))}} dx_1\cdots dx_{n-1} = \int_0^{x_n} V^{(n-1)}_{(a_i(1-\frac{x_n}{a_n}))}\,dx_n$$

$$\overset{(c)}{=} \int_0^{x_n} a_1\cdots a_{n-1}\left(1-\frac{x_n}{a_n}\right)^{n-1} V_1^{(n-1)}\,dx_n = \frac{a_1\cdots a_n}{n} V_1^{(n-1)} \text{ et donc } V_a^{(n)} = \frac{a_1\cdots a_n}{n!}$$

3ème exercice. a. S est paramétré par $x = (1-t)a + tc$, $y = (1-t)b + td$, $0 \le t \le 1$, donc $\int_S x\,dy - y\,dx = \int_0^1 ((1-t)a+tc)(d-b) - ((1-t)b+td)(c-a)\,dt = ad - bc$. b. Par le théorème de Green $\iint_P dx\,dy = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_{C_k} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}$.

4ème exercice. a.



b. $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos px\,dx = \frac{\sin p\pi}{p\pi}$, $b_n = 0$ parce que f est paire, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(p+n)x + \cos(p-n)x}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(p+n)\pi}{p+n} + \frac{\sin(p-n)\pi}{p-n}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2p}{p^2-n^2}\sin p\pi$ d'où

$$S_f(x) = \frac{\sin p\pi}{\pi}\left[\frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2-1}\cos x + \cdots + (-1)^n \frac{2p}{p^2-n^2}\cos nx + \cdots\right]$$

c. f est continue et dérivable par morceaux donc $f(x) = S_f(x)$ pour tout x et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier. d. En faisant $x = \pi$ on obtient

$$\cos p\pi = \frac{\sin p\pi}{\pi}\left[\frac{1}{p} + \frac{2p}{p^2-1} + \dots + \frac{2p}{p^2-n^2} + \dots\right]$$

d'où la formule.

e. Pour prouver que l'on peut dériver terme à terme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p}{p^2-n^2}$ il suffit de montrer que cette série converge (vrai car $\frac{2p}{p^2-n^2} \sim \frac{-2p}{n^2}$) et que la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2p^2-2n^2}{(p^2-n^2)^2}$ converge normalement sur $]0,1[$. Pour tout $n \geq 2$ et pour tout p, $0<p<1$, on a $\left|\frac{-2p^2-2n^2}{(p^2-n^2)^2}\right| \leq \frac{2+2n^2}{(1-n^2)^2} \sim \frac{2}{n^2}$ d'où la convergence normale.

f. On a donc $\frac{d}{dp}\pi \cot p\pi = -\frac{\pi^2}{\sin^2 p\pi} = -\frac{1}{p^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2+n^2}{(p^2-n^2)^2}$

de sorte que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 p\pi} = \frac{1}{p^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2+n^2}{(p^2-n^2)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(p+n)^2}$$