Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1 – 2008
Examen, durée 3 heures
Documents, calculettes, téléphones portables et cetera sont interdits

1. **Question de cours (4 points)** Énoncer et démontrer le théorème de dérivation d'une fonction définie par une intégrale simple :

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt, \ x \in [c,d].$$

2. **Exercice (7 points)** Aux réels positifs $a_1, \dots, a_n$ on associe le $n-$simplexe

$$S_a^{(n)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1 \right\}.$$

On note par $S_1^{(n)}$ le simplexe unité (il correspond à $a_1 = \dots = a_n = 1$) et par

$$V_a^{(n)} = \int_{S_a^{(n)}} dx_1 \dots dx_n$$

le volume de $S_a^{(n)}$. Le but de cet exercice est le calcul de ce volume.

(a) Dessiner $S_a^{(3)}$ et calculer $V_a^{(3)}$.

(b) Énoncer le théorème de changement de variable dans une intégrale multiple.

(c) Via un changement de variable que vous préciserez, montrer que $V_a^{(n)} = a_1 \dots a_n V_1^{(n)}$.

(d) À l'aide du théorème de Fubini montrer que

$$V_a^{(n)} = \int_0^{a_n} V_b^{(n-1)} dx_n$$

où b est à déterminer. En déduire que

$$V_a^{(n)} = \frac{a_1 \dots a_n}{n} V_1^{(n-1)}$$

et calculer $V_a^{(n)}$.

3. **Exercice (3 points)**

(a) Calculer l'intégrale curviligne $\int_S xdy - ydx$ où S est le segment de droite orienté qui va , dans le plan, du point (a,b) au point (c,d).

(b) Soit P le polygone dont les sommets successifs, orientés dans le sens trigonométrique, sont notés $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_n,y_n), (x_{n+1},y_{n+1}) = (x_1,y_1)$. On suppose que ce polygone n'est pas croisé, c'est-à-dire que la courbe S, constituée des segments orientés $S_k = [(x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1})]$, $1 \leq k \leq n$, est une courbe de Jordan. En utilisant la formule de Green et la question précédente donner une formule exprimant l'aire de P en fonction des coordonnées des sommets.

4. **Exercice (8 points)** Soit p un nombre réel non entier : $p \notin \mathbb{Z}$. On note f la fonction périodique de période 2π égale à $f(x) = \cos px$ lorsque $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Donner l'allure du graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Calculer la série de Fourier $S_f(x)$ de f en x.

(c) Quelles sont les propriétés de convergence de cette série ? Que vaut sa somme ?

(d) Montrer que

$$\pi \cot p\pi = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p}{p^2 - n^2}.$$

(e) Montrer que l'on peut dériver terme à terme la série précédente pour tout $p \in]0, 1[$.
Indication : montrer que la dite série est convergente et que la série dérivée converge normalement pour $p \in]0, 1[$.

(f) En déduire un développement en série de

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 p\pi}.$$