① $\mathrm{Vol}\left(B_{\mathbb{R}^n}(a,r)\right) = \int_{B_{\mathbb{R}^n}(a,r)} dx_1 \dots dx_n$

si $a=(a_1,\dots,a_n)$ on effectue le changement de variables

$$\varphi(x_1\dots x_n) = (\underbrace{x_1-a_1}_{u_1=}, \dots, \underbrace{x_n-a_n}_{u_n=}) = (u_1,\dots,u_n)$$

c'est un C^1 difféomorphisme et le déterminant de sa matrice Jacobienne est :

$$\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(B(a,r)) = B(0,r)$$

Donc :

$$\mathrm{Vol}\left(B_{\mathbb{R}^n}(a,r)\right) = \int_{B(a,r)} dx_1\dots dx_n = \int_{\varphi(B(a,r))} |J\varphi^{-1}(u_1\dots u_n)|\, du_1\dots du_n$$

$$= \int_{B(0,r)} du_1\dots du_n = \mathrm{vol}(B(0,r)).$$

② On effectue cette fois-ci le changement

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \left(u_1 = \frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r} = u_n\right)$$

c'est encore un C^1- difféomorphisme, $\varphi(B(0,r)) = B(0,1)$ et le déterminant de sa matrice Jacobienne vaut

$$\begin{vmatrix} 1/r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/r \end{vmatrix} = \frac{1}{r^n}$$

par conséquent :

$$\mathrm{Vol}\left(B_{\mathbb{R}^n}(0,r)\right) = \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1)} \overbrace{|J\varphi^{-1}(u_1\dots u_n)|}^{r^n}\, du_1\dots du_n$$

$$= r^n \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1)} du_1\dots du_n = r^n \mathrm{vol}\left(B_{\mathbb{R}^n}(0,1)\right).$$

• $B_1(1) = \int_{-1}^{1} dt = 2$;

$$B_2(1) = \int_{D(0,1)} dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi$$

③ $$B_n(1) = \int_{\{x_1^2+\dots+x_n^2 \le 1\}} dx_1 \dots dx_n = \int_{\{x_2^2+\dots+x_n^2 \le 1 \,\&\, x_1\in[-1,1]\}} dx_1 \dots dx_n$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-1}^{1} \left(\int_{\{x_2^2+\dots+x_n^2 \le 1-x_1^2\}} dx_2 \dots dx_n \right) dx_1$$

$$= 2\int_0^1 B_{n-1}\left(\sqrt{1-x_1^2}\right) dx_1$$

$$\overset{②}{=} 2B_{n-1}(1)\int_0^1 (1-x_1^2)^{n-1/2} dx_1$$

$$\overset{x_1=\cos t}{=} 2B_{n-1}(1)\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)^{n-1/2} \sin t \, dt = 2B_{n-1}(1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt$$

ie $$\boxed{B_n(1) = 2B_{n-1}(1)\, I_n \quad , \forall n \geq 2 .}$$

4a) On a $I_0 I_1 = \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2}$, $I_1 I_2 = \frac{\pi}{4}$

Hypothèse de recurrence $I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$, alors :

$$I_n I_{n+1} = I_n \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \, dt \right\}$$

$$= I_n \left\{ \left[\sin^n t \, . (-\cos t) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n \sin^{n-1} t \cos t \, (-\cos t) \, dt \right\}$$

$$= I_n \, . \, n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, (1-\sin^2 t) \, dt$$

$$= n I_n (I_{n-1} - I_{n+1}) \quad \text{soit} \quad \boxed{I_n I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_n I_{n-1}}$$

on peut alors appliquer l'hypothèse de recurrence

$$I_n I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2(n+1)} .$$

CQFD. Conclusion : $\boxed{I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}.}$

4) Les questions & donnent pour $n \geq 2$:

$$B_n(1) = 2B_{n-1}(1)\, I_n$$
$$= 4B_{n-2}(1)\, I_n I_{n-1}$$
$$= 4B_{n-2}(1)\, \frac{\pi}{2n}$$

i.e.: $\boxed{\forall n \geq 2 : B_n(1) = \frac{2\pi}{n} B_{n-2}(1)}$

5) Avec 4 nous avons :

$$B_{2p}(1) = \frac{2\pi}{2p} B_{2p-2}(1) = \frac{\pi}{p} B_{2p-2}(1) = \frac{\pi^2}{p(p-1)} B_{2p-4}(1)$$
$$= \dots = \frac{\pi^{p-1}}{p!} B_2 = \boxed{\frac{\pi^p}{p!} = B_{2p}(1)}$$

$$B_{2p+1}(1) = \frac{2\pi}{2p+1} B_{2p-1}(1) = \frac{(2\pi)^2}{(2p+1)(2p-1)} B_{2p-3}(1)$$
$$= \dots = \frac{(2\pi)^p}{(2p+1)(2p-1)\dots 7.5.3} \cdot B_1 = \boxed{\frac{2^{p+1}\pi^p}{(2p+1)\dots 7.5.3} = B_{2p+1}(1)}$$

on peut aussi écrire :

$$B_{2p+1}(1) = \frac{2^{p+1}\pi^p (2p)(2p-2)\dots 6\,4\,2}{(2p+1)(2p)(2p-1)\dots 7\,6\,5\,4\,3\,2} = \frac{2^{2p+1}\, p!\, \pi^p}{(2p+1)!}$$

6) <u>Si $n=2p$</u> : $\Gamma(1+\frac{n}{2}) = \Gamma(1+p) = p!$ et par conséquent :

$$B_{2p}(1) = \frac{\pi^p}{p!} = \frac{\pi^p}{\Gamma(1+\frac{2p}{2})}$$

<u>Si $n=2p+1$</u>

$$\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(p+1+\frac{1}{2}\right) = \left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+p-\frac{1}{2}\right) = \left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \cdots$$

$$= \overbrace{\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}^{(p+1 \text{ termes})}\ \Gamma(1/2)$$

$$= (2p+1)(2p-1)\cdots 5.3.1\ \Gamma(1/2)\,.\,2^{-(p+1)}$$

autrement dit :

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{p+1/2}}{(2p+1)(2p-1)\ldots 5.3.1.\sqrt{\pi}\ 2^{-(p+1)}}$$

$$= \frac{2^{p+1}\pi^p}{(2p+1)(2p-1)\ldots 5.3.1} = B_{2p+1}(1) \qquad \underline{\underline{\text{CQFD}}}$$

7) $\boxed{a}$ On calcule $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\left(\sin t - 1\right)dt \leq 0$ car $\sin(t) \geq 0$ & $\sin(t) \leq 1$ sur $[0,\pi/2]$: La suite $(I_n)_0^\infty$ est bien décroissante.

$\boxed{b}$ Vu (4-b) on a $\quad I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$, $n \geq 1$

donc comme $(I_n)_0^\infty$ décroît :

$$0 \leq I_n^2 \leq I_n . I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$$

ie $\boxed{0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\ ,\ n \geq 1}$

en particulier $\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = 0}$

7-c) On a $I_0 = \frac{\pi}{2} > I_1 = 1$ et $(I_n)_0^\infty$ décroît vers 0
il existe donc $n_0 \geqslant 2$ tel que

$$I_{n_0} \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad I_n < \frac{1}{2} \quad \forall n > n_0$$

7-d) Vu (4-c) on a

$$B_n(1) = B_{n-1}(1) \, . \, 2 I_n$$

Par conséquent : $B_n(1) \geqslant B_{n-1}(1)$ si $2 I_n \geqslant 1$

$B_n(1) \leqslant B_{n-1}(1)$ si $I_n < 1/2$

donc, vu la question précédente :

$$\boxed{B_1(1) \leq B_2(1) \leq \dots \leq B_{n_0}(1) \geqslant B_{n_0+1}(1) \geqslant \dots}$$

Rq : les inégalités sont strictes car $(I_n)_0^\infty$ décroît strictement
(voir la preuve de 7-a où $I_{n+1} - I_n > 0 \dots$)

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} 0 \leq B_n(1) &= B_{n-1}(1) \, . \, 2 I_n \\ &\leq B_{n_0}(1) \, . \, 2\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \\ &\leq B_{n_0}(1) \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

ie $\boxed{\lim_{n \to \infty} B_n(1) = 0}$

8) Si $n_0 = 5$, c'est donc dans $\mathbb{R}^5$ que la boule unité admet le plus grand volume.

– ~ –