L3 MAPES, ANALYSE, Devoir 2, 7 novembre 2009..

L'objectif de ce problème est l'étude du volume de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$

$$B_{\mathbb{R}^n}(a,r) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x-a\|^2 := (x_1-a_1)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2 \leq r^2\}$$

de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$.

Si vous n'arrivez pas à répondre à une question, vous pouvez l'admettre et continuer le problème.

(1) Montrer, via le changement de variables $x = ry+a$ que $\mathrm{vol}(B_{\mathbb{R}^n}(a,r)) = r^n \mathrm{vol}(B_{\mathbb{R}^n}(0_{\mathbb{R}^n},1)) := B_n(r)$.

(2) Calculer $B_3(r)$ en utilsant le théorème de Fubini sur $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

(3) Soit $n \geq 2$, montrer que

$$B_n(1) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\mathscr{D}_{n-1}(x_1)} dx_2 \dots dx_n \right) dx_1 = 2B_{n-1}(1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt,$$

où $\mathscr{D}_{n-1}(x_1)$ est un domaine que l'on précisera.

(4) On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$.

(a) Donner une relation de récurrence d'ordre 2 satisfaite par I_n.

(b) En déduire que $(n+1)I_nI_{n+1} = nI_nI_{n-1}$ et montrer que $I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

(c) En déduire que pour $n > 2$: $B_n(1) = \dfrac{2\pi B_{n-2}(1)}{n}$.

(5) Déduire de ce qui précède que pour $p > 0$

$$B_{2p}(1) = \frac{\pi^p}{p!}, \quad B_{2p+1}(1) = \frac{2^{p+1}\pi^p}{3\cdot 5\cdot 7 \dots (2p+1)}.$$

(6) On rappelle que $B_n(1) = 2B_{n-1}(1)I_n$.

(a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante puis convergente.

(b) Soit $0 < \varepsilon < \pi/2$, montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$0 \leq I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^n(t)dt \leq \frac{\pi}{2}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon) + \varepsilon.$$

En déduire $\lim_n I_n$.

(c) En déduire qu'il existe un entier $n_0 \geq 3$ tel que $I_{n_0} \geq 1/2$ et $I_{n_0+1} < 1/2$.

(d) En déduire que $B_1(1) \leq B_2(2) \leq \cdots \leq B_{n_0}(1) \geq B_{n_0+1}(1) \geq \cdots \geq B_n(1) \geq \dots$ et que $\lim_{n\to\infty} B_n(1) = 0$.

(e) En calculant I_n pour quelques valeurs de n, en déduire n_0. C'est donc dans l'espace $\mathbb{R}^{n_0}$ que la boule unité admet un volume maximal.