Exercice 2 : (a) On procède par récurrence sur $n \geq 1$.

- Si $n=1$ c'est évident puisque $\theta_1 \in]0,1[\Rightarrow \theta_1^2 < \sqrt{\theta_1}$
- Si $n=2$, la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$ donc on peut écrire

$$f(\alpha_1\theta_1+\alpha_2\theta_2) \geq \theta_1 f(\alpha_1)+\theta_2 f(\alpha_2)$$

soit

$$(\alpha_1\theta_1+\alpha_2\theta_2)^{1/2} \geq \theta_1\sqrt{\alpha_1}+\theta_2\sqrt{\alpha_2}$$

- On suppose la propriété vérifiée jusqu'au rang $n-1$ ($n \geq 2$) et soient $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}^+$, $\theta_i \in]0,1[$ avec $\theta_1+\dots+\theta_n=1$ alors avec l'indication :

$$\theta_1\alpha_1+\dots+\theta_n\alpha_n = \theta_1\alpha_1+(1-\theta_1)\underbrace{\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\alpha_2+\dots+\frac{\theta_n}{1-\theta_1}\alpha_n\right)}_{\tilde{\alpha}_1}$$

$$= \theta_1\alpha_1+(1-\theta_1)\tilde{\alpha}_1$$

comme $\tilde{\alpha}_1 \geq 0$ et $\theta_1+(1-\theta_1)=1$, on peut appliquer l'HR au rang 2 :

$$(\theta_1\alpha_1+\dots+\theta_n\alpha_n)^{1/2} = \left(\theta_1\alpha_1+(1-\theta_1)\tilde{\alpha}_1\right)^{1/2}$$

$$\overset{HR_2}{\geq} \theta_1\sqrt{\alpha_1}+(1-\theta_1)\sqrt{\tilde{\alpha}_1}$$

$$= \theta_1\sqrt{\alpha_1}+(1-\theta_1)\sqrt{\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\alpha_2+\dots+\frac{\theta_n}{1-\theta_1}\alpha_n}$$

maintenant, comme $\frac{\theta_2}{1-\theta_1}+\dots+\frac{\theta_n}{1-\theta_1} = \frac{\theta_2+\dots+\theta_n}{1-\theta_1} = \frac{1-\theta_1}{1-\theta_1} = 1$

l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ donne :

$$\sqrt{\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\alpha_2+\dots+\frac{\theta_n}{1-\theta_1}\alpha_n} \geq \frac{\theta_2}{1-\theta_1}\sqrt{\alpha_2}+\dots+\frac{\theta_n}{1-\theta_1}\sqrt{\alpha_n}$$

soit finalement (car $1-\theta_1>0$) :

$$(\theta_1\alpha_1+\dots+\theta_n\alpha_n)^{1/2} \geq \theta_1\sqrt{\alpha_1}+(1-\theta_1)\left\{\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\sqrt{\alpha_2}+\dots+\frac{\theta_n}{1-\theta_1}\sqrt{\alpha_n}\right\}$$

$$= \theta_1\sqrt{\alpha_1}+\theta_2\sqrt{\alpha_2}+\dots+\theta_n\sqrt{\alpha_n} \quad \text{CQFD !}$$

- Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{b-i}}$ C'est du cours

$\boxed{\text{b-ii}}$ f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ par le théorème de Riemann Lebesgue elle est donc bornée et son ensemble de points de discontinuité ~~est~~ de mesure nulle dans $[a,b]$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[a,b]$ donc $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est bornée et admet au plus un ~~nombre~~ ensemble de mesure nulle de pts de discontinuité : par Riemann Lebesgue elle est donc intégrable sur $[a,b]$.

$\boxed{\text{b- iii}}$ Soit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ dont le pas $\delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(y_i \in [x_i, x_{i+1}[)_{i=0}^{n-1}$ un echantillonage.
f et $\sqrt{f}$ étant intégrables sur $[a,b]$ nous savons que :

$$(1) \cdot \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$(2) \cdot \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{f(y_k)}\,(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b \sqrt{f(t)}\,dt$$

Posons $\alpha_i = f(y_i) \geqslant 0$, $\theta_i = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{b-a} \in]0,1[$

et $\theta_1 + \dots + \theta_n = \dfrac{x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}}{b-a} = \dfrac{x_n - x_0}{b-a} = 1$

On peut donc appliquer l'inégalité démontrée en ⓐ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{f(y_k)}\,(x_{k+1} - x_k) = (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k \sqrt{\alpha_k}$$

$$\leq (b-a) \sqrt{\theta_1 \alpha_1 + \dots + \theta_n \alpha_n}$$

$$\leq (b-a) \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) \frac{(x_{k+1} - x_k)}{b-a}}$$

$$\leq \sqrt{b-a} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)(x_{k+1} - x_k)}$$

Si on passe à la limite $(n \to \infty)$ (1) et (2) donnent :

$$\int_a^b \sqrt{f(t)}\,dt \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b f(t)\,dt}$$

<u>Exercice 3 :</u> Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)$$ où $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$: on reconnait donc la somme de Riemann associé à la fonction <u>Riemann intégrable</u> (car continue) f pour la subdivision de $[0,1]$: $x_k = \frac{k}{n}$ $1 \leq k \leq n$ on peut donc affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$