Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1 – 2008

Premier devoir.

1. **Exercice 1**

   Pour tout α, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$f_{n,\alpha}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\alpha^n}{n + \alpha^{2n}x^2}.$$
   (a) Déterminer l'ensemble I des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la suite de fonctions $f_{n,\alpha}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminer l'ensemble J des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Cette somme sera notée s_α.

   (c) Calculer $s_\alpha(0)$ pour tout $\alpha \in J$, $\alpha \neq 1$.

   (d) Soit $\alpha \in J$, $\alpha \neq 1$.

      i. Soit $f_n : A \to \mathbb{R}$. Quand dit-on que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement sur A ?

      ii. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

      iii. Montrer que s_α est une fonction continue

   (e) Soit $\alpha \in J$, $\alpha \neq 1$ et soit $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

      i. Calculer $f'_{n,\alpha}(x)$ et montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f'_{n,\alpha}$ converge normalement sur $[-b, b]$.

      ii. En déduire que s_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $s'_\alpha(0)$.

2. **Exercice 2**

   (a) On se donne des nombres réels $\alpha_i \geq 0$ et $0 < \theta_i < 1$ avec $\theta_1 + \ldots + \theta_n = 1$. Montrer que
$$\theta_1\sqrt{\alpha_1} + \ldots + \theta_n\sqrt{\alpha_n} \leq \sqrt{\theta_1\alpha_1 + \ldots + \theta_n\alpha_n}.$$
   Indication : utiliser un argument de votre choix ou bien une récurrence sur n. Dans ce cas, traiter le cas $n = 2$ puis écrire que
$$\theta_1\alpha_1 + \ldots + \theta_n\alpha_n = \theta_1\alpha_1 + (1-\theta_1)\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\alpha_2 + \ldots + \frac{\theta_n}{1-\theta_1}\alpha_n\right).$$
   (b) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann avec $f(x) \geq 0$ pour tout x.

      i. Quelle est la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann ?

      ii. Montrer que $\sqrt{f}$ est, elle-aussi, intégrable au sens de Riemann et que

      iii.
$$\int_a^b \sqrt{f(x)}dx \leq \sqrt{\int_a^b f(x)dx}.$$
      Indication : utiliser des sommes de Riemann.

3. **Exercice 3**

   Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$
   Indication : interpréter cette somme comme une somme de Riemann.