☯ ☢ ☯ **AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES** ☯ ☢ ☯

Intégration & Intégrales et séries à paramètres – 13 Septembre 2008.

1. Intègration

Exercice 1. *Préciser la nature des intégrales impropres suivantes :*

1) ***(Intégrales de Fresnel)*** $\displaystyle\int_0^\infty \cos(t^2)dt$ *et* $\displaystyle\int_0^\infty \sin(t^2)dt$.

2) $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\alpha}\Big(\big(\cos(\frac{1}{x})\big)^x - 1\Big)dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$ & $\displaystyle\int_2^\infty \Big(\log\big(1-\frac{\log(x)}{x}\big)+\frac{\log(x)}{x}\Big)dx$.

3) Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (α,β) pour lesquels l'intégrale $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+t^\alpha)}{t^\beta}dt$ *converge*

4) $I_\alpha := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ & $\displaystyle\int_0^\infty \cos^2(t^2)dt$.

Exercice 2. *Soit $f : [0,1]\mapsto\mathbb{R}$ continue, dérivable à l'origine et telle que $f(0)=f'(0)=0$. Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^{-3/2}dt$ *converge.*

Exercice 3. *Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$. Quelles implications existe-t-il entre les propriétés*

1) $\int_0^\infty f(t)dt$ *converge.*
2) $\lim_{x\to\infty} f(x)dx = 0$.
3) f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4. . *$C(\alpha)$ désignant le coefficient de x^{2005} dans le développement limité à l'origine et à un ordre convenable de $(1+x)^\alpha$, calculer*

$$\int_0^1 C(-t-1)\Big(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}\cdots+\frac{1}{t+2005}\Big)dt.$$

Exercice 5. ***(Histoires de moments).***

0) Soient $f\in C([a,b])$, $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)t^k dt = 0,\quad \forall k\in\{0,1,\dots,n\}$. *Montrer que f possède au moins $n+1$ zéros dans $[a,b]$.*

1) Soit $f\in C([a,b])$ telle que $\int_a^b f(t)t^n dt = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle (théorème des moments de Hausdorff).

2) Le théorème des moments de Hausdorff tombe en défaut sur $\mathbb{R}^+$: Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{-x^{1/4}}\sin(x^{1/4})$.

a) Montrer que $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t}dt = \frac{n!}{\omega^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}$ *où* $\omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, *(pour cela, remarquer que $I_{4n+3}\in\mathbb{R}$...).*

Exercice 6. ***(Lemme de Riemann-Lebesgue).*** *Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$, montrer que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)dt = 0$$

si f est de classe $\mathcal{C}^1$, si f est en escalier, si f est continue.

2. Intégrales à paramètres

Exercice 7. *Préciser le domaine de définition de la fonction définie par* $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^x}$ *puis montrer qu'au voisinage de $+\infty$ nous avons $f(x) = 1 + o(x^{-1})$.*

Exercice 8. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction continue à support compact (nulle en dehors d'un compact) et $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$.*

1) Montrer que $\tilde{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) Montrer que $\tilde{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que si $\tilde{f}$ est à support compact, alors $f \equiv 0$.

4) Montrer que si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 9. *Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente mais non absolument convergente.*

Exercice 10. *Évaluer à la main la quantité $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin(t)}{t}dt$ avec une précision décimale d'au moins deux chiffres aprés la virgule.*

Exercice 11. *Un calcul de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt$ (pour d'autres méthodes voir* ***ici*** *). On considère les applications $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t+x}dt,\ g(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^2+1}dt$.*

1) Montrer que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^\star$.

2) Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

3) Montrer que $f - g$ est 2π-périodique.

4) Montrer que f et g sont équivalentes à $\frac{1}{x}$ en $+\infty$ puis que $f = g$.

5) En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12.

Exercice 13. *Soit pour $n \in \mathbb{N}^\star,\ x \in [0,1]\ :\ g_n(x) = \sin(nx)$. Montrer que la suite $(g_n)_n$ n'admet aucune sous-suite simplement convergente vers 0 sur $[0,1]$.*

Exercice 14. *(Un lemme de Cantor) Soient $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ deux suites de nombres réels telles que la suite de fonctions $(\alpha_n\cos(nx) + \beta_n\sin(nx))_n$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.*

1) Montrer que $\lim_\infty \alpha_n = \lim_\infty \beta_n = 0$. (pour la seconde limite on pourra raisonner par l'absurde..)

2) Montrer que la conclusion subsiste si on a la convergence simple seulement sur $[a,b]$, $a < b$. Pour cela en posant $f_n(x) = \dfrac{(\alpha_n\cos(nx) + \beta_n\sin(nx))^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ et, raisonnant par l'absurde montrer que l'on peut extraire de $(f_n)_n$ une sous-suite simplement convergente vers zéro sur $[a,b]$...

Exercice 15. *Pour $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle σ vérifiant$|\ \sigma\ | < 1$.*

1) Montrer que $f\ :\ t \in \mathbb{R}_+^\star \mapsto f(t) = \dfrac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}$, $f(0) = z$, est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (et continue).

2) Pour $t > 0$ développer f en série d'exponentielles et appliquer la convergence dominée à la suite des sommes partielles pour établir

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}dt = \sum_{n\geq 0} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

3) Sachant (exercice classique des séries de Fourier...) que pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ on a $\pi cotan(\pi z) = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ en déduire que pour $2z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}dt = \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right).$$

4) On rappelle que (d.s.e.) pour $|\ z\ | < 1$ et $t > 0$: $f(t) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(zt)^{2n+1}}{(2n+1)!\sinh(t)}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sinh(zt)}{\sinh(t)}dt = 2\sum_{n\geq 0}(1 - 2^{-2n-2})\zeta(2n+2)z^{2n+1},$$

où $\zeta(\alpha) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$. *En déduire que pour* $\mid z \mid< 1$

$$\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 2\sum_{n\geq 0}(1-2^{-2n-2})\zeta(2n+2)z^{2n+1}.$$

Exercice 16. *(la fonction Gamma) Soit* $f : (x,t) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \longmapsto f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}$. *Montrer que pour tout* $x > 0$ *la fonction*$f(x,\cdot)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^\star$. *On définit alors la fonction Gamma par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star)$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *:*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \big(\log(t)\big)^k t^{x-1}e^{-t}dt.$$

2) Etablir successivement

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),\ \forall x > 0\ ; \quad \Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

3) A l'aide de la formule $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ *et de la suite de fonctions de terme général* $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \chi_{]0,n]}(t),\ n \geq 1$, *montrer que* $\Gamma'(1) = -\gamma$ *(*γ *est la constante d'Euler). Aprés avoir établi pour* $x > 0 : \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$ *montrer que*

$$\Gamma'(n+1) = n!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma\right),\ n \geq 1.$$

4) Au moyen du changement de variables $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$, *établir pour* $x > 0$ *:*

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)}ds$$

où $\varphi(x,s) := x\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$

5) Montrer que

$$\forall s \in]-\sqrt{x}, 0] : \varphi(x,s) \leq -\frac{s^2}{2} \quad \text{et} \quad \forall s \geq 0,\ x \geq 1 : \varphi(x,s) \leq \varphi(1,s).$$

6) En déduire $\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}ds$ *puis la formule de Stirling*

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$

7) Montrer que pour tout $x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \Gamma(x),$$

et en déduire la formule de Gauss

$$\forall\, x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Puis celle de Weierstrass

$$\forall\, x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}.$$

On note $\psi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, *l'application définie pour* $x > 0$ *par* $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. *Démontrer que pour tout* $x > 0 : \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x(x+n)}$, *et en déduire que* $\Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}\log(x)dx.$

8) (Le théorème de Bohr-Mollerup) Montrer que $\log\Gamma$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^\star$*. Réciproquement, soit* $f\,:\,\mathbb{R}_+^\star\to\mathbb{R}_+^\star$ *une application log-convexe vérifiant*

$$f(1)=1\quad \textit{et}\quad \forall\,x>0,\ f(x+1)=xf(x).$$

Montrer (à l'aide de la formule de Gauss) que $f=\Gamma$

Exercice 17. *Calcul de l'intégrale de Gauss* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt$*. On considère l'application* $\displaystyle f(x):=\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$*.*

1) *Montrer que* $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)\cap\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$*.*

2) *En déduire que* f *est solution d'une équation différentielle.*

3) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(on pourra introduire la fonction auxiliaire* $g(t)=e^{-t}f(t)$*...).*

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://picard.ups-tlse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr

PETIT RESUMÉ DU COURS

Dans tout ce qui suit I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_m(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I (à valeurs réelles et complexes), enfin les fonctions de module intégrable sur I est noté $L^1(\mathbb{R})$ et si $f \in L^1(\mathbb{R})$ on dira que « f est intégrable [1] sur I »

3. Théorème de la convergence dominée

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction dans $\mathcal{C}_m(I)$ vérifiant :

1) *Il existe $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_m(I)$ telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in I \quad \text{« hypothèse de domination »}$$

2) *La suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur I vers une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I)$.*

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_n \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_n f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

4. Théorème de la convergence monotone

Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{C}_m(I) \cap L^1(\mathbb{R})$ une suite croissante simplement convergente vers une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I)$. Alors f est intégrable sur I si, et seulement si la suite $\left(\int_I f_n(t)dt\right)_n$ est majorée. Dans ce cas

$$\lim_n \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_n f_n(t)dt = \sup_n \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

remarque : en d'autres termes, pourvu que la suite soit monotone et simplement convergente sur l'intervalle d'intégration, la limite « rentre » dans l'intégrale en admettant les valeurs $\pm\infty$ si jamais la fonction limite f n'est pas intégrable. Ce théorème est bien utile lorsqu'il est délicat voire impossible de vérifier l'hypothèse de domination dans le théorème de la convergence dominée.

5. Inversion des symboles $\sum$ et $\int$

Soit $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}_m(I) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que

1) *La série de fonction $\sum_n f_n(t)$ est simplement convergente sur I vers $f \in \mathcal{C}_m(I)$.*
2) *La série numérique $\sum_n \int_I |f_n(t)|dt$ converge.*

Alors

$\rightsquigarrow$ *f est intégrable sur I*
$\rightsquigarrow$ $\int_I |f(t)|dt \leq \sum_n \int_I |f_n(t)|dt$.
$\rightsquigarrow$ *La série $\sum_n \int_I f_n(t)dt$ converge et*

$$\sum_n \int_I f_n(t)dt = \int_I \sum_n f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

remarque : c'est seulement une condition suffisante : la série $\sum_n \int_I |f_n(t)|dt$ peut trés bien diverger, à ce moment pour justifier un éventuel échange $\sum \int = \int \sum$ ce théorème est inutilisable ; on peut parfois s'en sortir en essayant d'appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite $(g_n)_n$ des sommes partielles ($g_n = \sum_{1 \leq k \leq n} f_k$)

---

1. Attention ! $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ mais $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$...

6. Intégrales dépendant d'un paramètre

6.1. continuité.

Soit $f\ \ \Omega\times I\longrightarrow\mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$ *(où* Ω *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*) vérifiant les propriétés*

1) f *est continue sur* $\Omega\times I$*.*
2) *Il existe une fonction* g *intégrable sur* I *telle que*

$$|f(x,t)|\leq g(t),\quad \forall\,(x,t)\in\Omega\times I.$$

Alors $F(x)=\int_I f(x,t)dt$ *est continue sur* Ω

remarque : encore une fois, une domination globale est souvent impossible à obtenir ; mais il est bien sûr suffisant de travailler localement i.e. de dominer localement au voisinage de tout point $a\in\Omega$.

6.2. dérivation.

Soit $f\ \ \Omega\times I\longrightarrow\mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$ *(où* Ω *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*) vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. Si de plus* f *admet sur* $\Omega\times I$ *une dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *vérifiant elle aussi les hypothèses précédentes, alors* $F(x)=\int_I f(x,t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω *et*

$$F'(x)=\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt,\quad \forall\,x\in I.$$