☯ ☢ ☯ AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES ☯ ☢ ☯
Algèbre linéaire (2) – Vendredi 19 Septembre 2008.

Autour du groupe orthogonal $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et unitaire $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$.

1-a) Soit E un espace hermitien de dimension n. Montrer qu'un endomorphisme unitaire de E est diagonalisable dans une base orthonormée et que toutes ses valeurs propres sont en module égales à 1

1-b) Soit E un espace euclidien de dimension n, u un endomorphisme orthogonal de E et $O \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans une base orthonormée. Montrer qu'il existe $O_1 \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $O_1^{-1}OO_1$ soit une matrice diagonale par blocs du type : $I_r, -I_s, \Theta_1, \dots, \Theta_l$ où $\Theta_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$.

2) Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle positive, montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$ et que B est un polynôme en A.

3) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$ et que S est un polynôme en ${}^tAA$.

4) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

5) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O, S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

6) Montrer que la correspondance $GL_n(\mathbb{R}) \ni A \mapsto (O, S) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (voir 3)) est bicontinue.

7) Montrer que les valeurs propres des éléments d'un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ sont de module 1

8) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ maximal pour l'inclusion.

9) Montrer que le groupe unitaire $\mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

10) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes qui sont connexes par arcs.

Quelques exercices supplémentaires.

Exercice 1. *La matrice symétrique* $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 2. *Soit E un espace pré-hilbertien, montrer que l'ensemble*

$$\mathscr{O} := \{(x,y) \in E \times E \text{ tels que } x, y \text{ sont libres dans } E\}$$

est un ouvert de $E \times E$.

Exercice 3. *Soient $(e_1, \dots, e_d)$, $(f_1, \dots, f_d)$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien $(E, \langle .|. \rangle)$. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, montrer que la quantité $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq d} \langle u(e_i), f_j \rangle^2$ est indépendante du choix de ces deux bases.*

Exercice 4. *Soient f, g deux endomorphismes symétriques définis positifs d'un espace Euclidien E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique défini positif $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f \circ h + h \circ f = g$.*

Exercice 5. *Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - A$ soit définie positive, montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{2p-1} trace(A^k)\right)_{p \geq 1}$ est majorée. Si de plus $A \in M_n(\mathbb{R}_+)$, montrer que $I_n - A \in M_n(\mathbb{R}_+)$*

Exercice 6. *Soit n un entier ≥ 2. Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible et plus précisément une matrice orthogonale.*

Exercice 7. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall\, X \in M_n(\mathbb{R})$, $trace(X) = 0 \;\Rightarrow\; trace(AX) = 0$. Montrer que $A = \lambda I_n$.*

Exercice 8. *Soit $S \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique réelle, donner une condition nécessaire et suffisante sur ses valeurs propres pour quelle soit le carré d'une matrice antisymétrique réelle. Sous cette hypothèse, montrer que sa « racine carrée » est unique.*

Exercice 9. *$\mathscr{S}_n$ désignant le sous-espace dans $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles, calculer pour $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$*

$$\inf_{M=((m_{ij}))\in\mathscr{S}_n} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

Exercice 10. *Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $M = 0S$ et cette correspondance est bicontinue. Montrer que le résultat subsiste sans l'unicité si $M \in M_n(\mathbb{R})$ (il existe un résultat analogue dans le cas complexe.*

 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://picard.ups-tlse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr