☯ ☢ ☯ AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES ☯ ☢ ☯
Exercices d'Analyse – 10 Décembre 2008.

Exercice 1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}[x]$ on pose $N_A(P) = \sup_{x\in A} |P(x)|$.*
1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N_A soit une norme sur $\mathbb{R}[x]$.
2) On suppose la condition de 1) réalisée, donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la forme linéaire $\mathbb{R}[x] \ni P \mapsto P(0)$ soit continue.

Exercice 2. *1) Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe une boule $B(0,r) \subset K$, $(r > 0)$ et soit $\mathscr{E} = \{ u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d) \ : \ u(K) \subset K\}$ montrer que $\mathscr{E}$ est compact.*
2) Montrer que si $K \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ alors $\mathscr{E}$ n'est pas compact.
3) (le bon énoncé) Montrer que $\mathscr{E}$ est compact si et seulement si vect$(K) = \mathbb{R}^d$.

Exercice 3. *Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique égale à e^{ax}, $(a \neq 0)$ sur $[0, 2\pi[$. En déduire $\sum_{n\geq 1} a/(a^2 + n^2)$ et retrouver $\sum_n 1/n^2 = \pi^2/6$. Enfin montrer que $\lim_{a\to\infty} \sum_{n\geq 1} a/(a^2 + n^2) = \pi/2$.*

Exercice 4. *1) Sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ de dimension finie 2, montrer que les normes : $N_1(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|$ et $N_2(a + b\sqrt{2}) = |a| + |b|$ ne sont pas équivalentes. Commentaire ?*
2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Monntrer que E est de dimension finie, si et seulement si toutes les normes sur E sont équivalentes (pour l'implication non classique on pourra, si l'espace n'est pas de dimension finie commencer par construire une forme linéaire discontinue...).

Exercice 5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique égale à $\sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$.*
1) Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que f est développable en série de Fourier ?
2) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)dt$, montrer que pour tout $x > 0$ $G(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{2x} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$. En déduire que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ existe, est finie et strictement positive.
3) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$, à l'aide de la question précédente montrer que $a_n = O(n^{-3/2})$.
4) En déduire que f est développable en série de Fourier.

Exercice 6. *$\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est munit de la norme de la convergence uniforme ; l'application $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \ni f \mapsto \inf_{x\in[0,1]} f(x)$ est-elle continue ?*

Exercice 7. *Existe-t-il $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ deux fois continuement dérivable et telle que $\sum_{n=1}^\infty f(1/n)$ converge mais $\sum_{n=1}^\infty |f(1/n)|$ diverge ?*

Exercice 8. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique égale à $y(1 - 4y^2)$ sur $[-1/2, 1/2]$ et $f(x) := \sum_{n=1}^\infty g(n!x)/(n!)^2$. Montrer que f est dérivable, $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et $f'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Exercice 9. *Soit $f_i n\mathscr{C}^1([0, \pi])$ telle que $f(0) = f(\pi)$ et $\int_0^\pi f'(t)^2 dt = 1$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_n$ telle que $\sum_{n\geq 1} a_n^2 = 2/\pi$ et $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(nx)/n$.*

Exercice 10. *On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = (-1)^n \sin(\sin(\dots(\sin(x))\dots))$, ($n$ itérations du sinus)*
1) Montrer que la suite $(f_n(x))_n$ est alternée puis vérifie les hypothèse du « théorème des séries alternées ». En déduire la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum_n f_n$; justifier enfin l'uniforme convergence sur $\mathbb{R}$.
2) On va montrer qu'il n'y a pas normale convergence sur $\mathbb{R}$, pour cela on pose $a_n = \sin(\sin(\dots(\sin(1))\dots))$. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{\alpha a_n^{\alpha+2}}{6}$. En considérant $\sum_{k=2}^{n-1} \left(a_{k+1}^{-2} - a_k^{-2}\right)$ en déduire un équivalent de a_n et conclure.

Exercice 11. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$: $|f(x)| < |x|$. Montrer que la suite des itérés $(f^n := f \circ f \cdots \circ f)_n$ est uniformément convergente vers la fonction nulle sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$.*

Exercice 12. *Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n/(2n + 1)$.*

Exercice 13. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$; on suppose que $f(x + 3/10) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0, 7/10]$, montrer que f admet au moins 7 zéros dans $[0, 1]$.*

Exercice 14. *On suppose que le polynôme* $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1, \quad a_i \geq 0,\ i = 1 \ldots n-1$ *n'admet que des racines réelles. Montrer que*

1) $P(2) \geq 3^n$.

2) $P(x) \geq (x+1)^n, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$.

3) $a_k \geq \binom{n}{k}, \quad k = 1 \ldots n-1$.

Références

[1] Francinou, Gianella H. & Nicolas S. *Exercices de Mathématiques, Analyse (trois tomes)*, Cassini.

[2] Kaczor W.J. & Nowak M.T. *Problems in Mathematical Analysis (trois tomes)*, Student Math. Library (AMS) (traduits en francais chez EDP-Sciences).

[3] Rajwade A.R. & Bhandari *Surprise and Counterexamples in Real Function Theory*, TRIM 42, Hindustan Book Agency (2007).

[4] La Revue de la filère Mathématiques, abonnez vous ! http ://www.rms-math.com/index.php RDE.

12 décembre 2008, Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://picard.ups-tlse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@picard.ups-tlse.fr