UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - Feuille 8 (calculs de primitives). ☯ ☢ ☯

Primitivation de fractions rationnelles : Calculer les primitives suivantes en précisant leur domaine de définition.

1) Montrer que $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x+1)} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \log|x| - \log|x+1| + C.$

2) Montrer que $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

3) Montrer que $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^2+2x+2} = \frac{x^2}{2} - 2x + \log(x^2+2x+2) + 2\text{arctan}(x+1) + C.$

4) Montrer que $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+10}{x(x^2-4x+5)}dx = 2\log|x| + 2^{-1}\log|x^2-4x+5| + 5\text{arctan}(x-2) + C.$

5) Montrer que $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4(1+x^2)^2} + C.$

6) Montrer que $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}dx = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2}\left(\arctan(x) - x\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4^k k!}{2k(2k)!(1+x^2)^k}\right) + C_n,\ n \in \mathbb{N}^\star.$

7) Calculer $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)}dx.$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles : Calculer les primitives suivantes en précisant leur domaine de définition.

1) Montrer que $\int \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\text{arctan}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{x+1+\sqrt{2x}}{x+1-\sqrt{2x}} - \sqrt{2}\text{arctan}(\sqrt{2x}+1) + \sqrt{2}\text{arctan}(\sqrt{2x}-1) + C.$

2) Montrer que $\int \frac{dx}{e^x+1} = 3\sqrt{e^x-1}3 - \log(1+\sqrt{e^x-1}3) - 2^{-1}\log\left((\sqrt{e^x-1}3)^2 - \sqrt{e^x-1}3 + 1\right) + \sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt{e^x-1}3-1}{\sqrt{3}} + C.$

3) Régles de Bioche : si vous avez à primitiver une fraction rationnelle en sin et cos les règles suivanyes permettent de se ramener à une fracton rationnelle :

– Si la fraction reste inchangée en remplacant x par $-x$ on peut poser $u = \cos(x)$.
– Si la fraction reste inchangée en remplacant x par $\pi - x$ on peut poser $u = \sin(x)$.
– Si la fraction reste inchangée en remplacant x par $\pi + x$ on peut poser $u = \tan(x)$.

Et dans le doute, le changement $u = \tan(x/2)$ (vérifier qu'alors $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx = \frac{2du}{1+u^2}$) vous ramène toujours sur une fraction rationnelle.

4) Montrer que $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)+\cos^5(x)}{\sin^2(x)+\sin^4(x)}dx = \sin(x) - \frac{2}{\sin(x)} - 6\ \arctan(\sin(x)) + C.$

5) Calculer $\displaystyle\frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$

6) Calculer $\displaystyle\frac{\tan(x)}{1+\cos(x)}dx.$

Vous trouverez d'autres documents ainsi que les archives des deux précédentes années à l'adresse suivante : http ://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/L1PCP.html