UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - Feuille 6 (Dérivation). ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Montrer que* $\log(x) < x/e,\ \forall\, x > 0,\ x \neq e$. *Lequel des deux réels* e^π *et* π^e *est le plus grand ?*

Exercice 2. *Montrer que*

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x, \quad \forall\, x \in [0, \pi/2],$$

et représenter graphiquement cette inégalité (pour la premièr einégalité on pourra par exemple montrer que pour tout $0 < x < \pi/2$*,il existe* $0 < \theta < x$ *tel que* $\sin(x)/x = \cos(\theta)$ *pour en déduire que la fonction* $f(x) = \sin(x)/x,\ x \in]0, \pi/2],\ f(0) = 1$ *est strictement décroissante sur* $[0, \pi/2]$*...).*

Exercice 3. *En appliquant le théorème des accroissements finis à* $x \mapsto \log(1 + x)$ *sur les segments* $[0, x/q]$ *et* $[x/q, x/p]$*, montrer que pour* $0 < p < q$ *:*

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q, \quad \forall\, x > 0.$$

Exercice 4. *Montrer que* $e^x \geq 1+x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. *En « déduire » l'inégalité arithmético-géométrique*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} := G_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ a_1, a_2 \ldots, a_n \geq 0,$$

et préciser le cas d'égalité (appliquer l'inégalité à $x = -1 + a_i/A_n,\ 1 \leq i \leq n$*...).*

Exercice 5. *Calculer la dérivée* n*-ième de* $x \mapsto x^n(1-x)^n$. *En déduire que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = \frac{(2n)!}{n!^2}$.

Exercice 6. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable au point* a. *Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(a + 1/n)}{f(a)}\right)^{1/n} = 1, \quad f'(a) > 0,$$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{(\log x - \log a)^{-1}} = a\frac{f'(a)}{f(a)}, \quad a > 0,\ f'(a) > 0.$$

$$\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a} = -na^{n-1} f(a) + a^n f'(a), \quad n \in \mathbb{N},$$

Exercice 7. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable, si* $f(0) = 0$*, montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}.$$

Exercice 8. *On veut calculer* $\lambda := \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

(1) *Justifier l'existence de* λ.

(2) *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *dérivable, si* $f(0) = 0$ *montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{1}{n+2}\right) \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)\right) = \lambda f'(0).$$

(3) *En considérant* $f(x) = \log(1+x)$, *montrer que* $\lambda = \log(2)$.

Exercice 9. *Montrer que*

1) $(e^x \sin(x))^{(n)} = 2^{n/2} e^x \sin(x + n\pi/4),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^\star$.

2) $(x^n \log(x))^{(n)} = n! x^{-(n+1)} \left(\log(x) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} \right),\ x \in \mathbb{R}_+^\star,\ n \in \mathbb{N}^\star$.

3) $\left(x^{n-1} e^{x^{-1}} \right)^{(n)} = (-1)^n e^{x^{-1}} x^{-(n+1)},\ x \in \mathbb{R}^\star,\ n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 10. *Déterminer les fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *telles qu'il existe* $a \neq a^2, b \in \mathbb{R}$ *avec*

$$f \circ f(x) = ax + b, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11. *Soit* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$. *Si* $f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1$, *montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)^x = e^{-a^2/2}.$$

Solution détaillée : *Vu les hypothèses sur* f, *la formule de Taylor-Young nous donne* $f(a/\sqrt{x}) = 1 - \frac{a^2}{2x} + o(x^{-1})$ *et on a donc*$f(a/\sqrt{x})^x = [1 - \frac{a^2}{2x} + o(x^{-1})]^x = \exp[x \log(1 - \frac{a^2}{2x} + o(x^{-1})] = \exp[-\frac{a^2}{2} + o(1)] \to e^{-a^2/2}$ *lorsque* $x \to +\infty$.

Exercice 12. *Soit* $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *trois fois dérivable au point* a. *Montrer que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^4} \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix} = f(a) f^{(3)}(a) - f^{(2)}(a)^2.$$

Exercice 13. *Soit* $f\ :\ [-1,1] \to \mathbb{R}$ *trois fois dérivable vérifiant* $f(0) = f'(0) = f(-1) = 0$ *et* $f(1) = 1$. *Montrer qu'il existe* $-1 < c < 1$ *tel que* $f'(c) \geq 3$.

L1/PCP, Feuille 6 : Dérivation, corrigé de quelques exercices.

Exercice 14. *L'étude sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *de la fonction* $f(x) = \log(x) - x/e$ *assure qu'elle présente un maximum strict en* $x = e$ *où elle est nulle : l'inégalité en résulte. Pour* $x = \pi$ *on a donc* $\log(\pi) < \pi/e$ *soit* $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 15. *L'inégalité* $\sin(x) \leq x$ *ne pose pas de problèmes. Pour la seconde, soit* $0 < x < \pi/2$, *le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction sinus nous assure qu'il existe* $0 < \theta < x$ *tel que* $\sin(x)/x = \cos(\theta)$. *De là, comme* $f'(x) = \frac{\cos(x)-\sin(x)/x}{x}$, *on peut donc aussi écrire* $f'(x) = \frac{\cos(x)-\cos(\theta)}{x} < 0$ *car* $0 < \theta < x < \pi/2$ *:* f *est donc strictement décroissante sur* $[0, \pi/2]$, *comme* $f(\pi/2) = 2/\pi$ *l'inégalité est démontrée (il existe beaucoup d'autres démonstrations).*

Exercice 16. *Il existe donc* $0 < \zeta_0 < x/q < \zeta_1 < x/p$ *tels que*

$$\frac{\log(1 + x/q)}{x/q} = \frac{1}{1+\zeta_0} > \frac{1}{1+\zeta_1} = \frac{\log(1 + x/q) - \log(1 + x/p)}{x/q - x/p}$$

soit encore $(x/p)\log(1 + x/q) > (x/q)\log(1 + x/p)$ *qui donne l'inégalité.*

Exercice 17. • *Par le théorème des accroissements finis :* $(e^x - 1)/x = e^\zeta > 1,\ \forall\, x > 0$ *et* $(e^x - 1)/x = e^\zeta < 1,\ \forall\, x < 0$ *; il en résulte que* $e^x < 1 + x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^\star$, *enfin pour* $x = 0$ *on a égalité.*
• *Soit* $n \geq 1$, *si* $A_n \neq 0$ *nous avons pour* $x = -1 + a_i/A_n$ *:* $e^{-1+a_i/A_n} \geq a_i/A_n \geq 0$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$. *En multipliant on trouve* $e^{-n+(a_1+\cdots+a_n)/A_n} = e^0 = 1 \geq G_n^n/A_n^n$ *soit (la fonction racine n-ième est croissante sur* $\mathbb{R}_+^\star$*)* $A_n \geq G_n$. *Si* $A_n = 0$ *alors* $G_n = A_n = 0$. *Enfin comme l'inégalité* $e^x \geq 1 + x$ *est une égalité seulement pour* $x = 0$, *le raisonnement précédent assure que* $A_n = G_n$ *ssi* $-1 + a_i/A_n = 0,\ 1 \leq i \leq n$ *i.e. ssi* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Exercice 18. *Avec la formule de Leibnitz on a* $F^{(n)}(x) = (x^n(1-x)^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (x^n)^{(n-k)}((1-x)^n)^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k n(n-1)\ldots(n-(n-k)+1)x^{n-(n-k)}(-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(1-x)^{n-k} = n!(-1)^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 x^k (x-1)^{n-k}$. *Le coefficient de* x^n *est donc* $n!(-1)^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$.

Exercice 19. F *est clairement continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$, *en outre, les propriétés du déterminant impliquent que* $F(a) = F(b) = 0$ *: le théorème de Rolle assure alors l'existence de* $x_0 \in]a, b[$ *tel que* $F'(x_0) = 0$. *Pour* $g(x) = x,\ h(x) = 1,\ x \in [a, b]$, *on retrouve le théorème des accroissements finis et sa version généralisée pour* $h \equiv 1$.

Exercice 20. *La formule de Taylor-Young appliquée à* f *sur* $[0, k/n^2]$ *donne pour* $0 \leq k \leq n$ *:*$f(k/n^2) = \frac{k}{n^2}f'(0) + o(\frac{1}{n})$ *(bien remarquer que* $\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ *assure que le petit « o » est bien un* $o(\frac{1}{n})$*...).On a donc* $\sum_0^n f(k/n^2) = \sum_0^n \frac{k}{n^2}f'(0) + (n+1)o(\frac{1}{n}) = \frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0) + o(1) \to \frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 21. • *Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} = \frac{4n^2-4}{(2n+1)(2n+2)2n} \geq 0$ *: la suite* $(u_n)_n$ *est donc croissante. Elle est aussi majorée car* $u_n \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$ *: elle est donc convergente.*• *Comme* $f(0) = 0$, *la formule de Taylor-Young implique que* $f(\frac{1}{n+k}) = \frac{f'(0)}{n+k} + o(\frac{1}{n})$ *pour tout* $1 \leq k \leq n$. *On somme ces* n *égalités :*$f(\frac{1}{n+1}) + f(\frac{1}{n+2}) + \cdots + f(\frac{1}{2n}) = \frac{f'(0)}{n+1} + o(\frac{1}{n}) + \frac{f'(0)}{n+2} + o(\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{f'(0)}{2n} + o(\frac{1}{n}) = f'(0)u_n + n \cdot o(\frac{1}{n})$ *qui tends vers* $\lambda f'(0)$ *vu la première question et la définition du « o ».* • *Pour* $f(x) = \log(1+x)$ *nous aurons* $\lim_n f(\frac{1}{n+1}) + f(\frac{1}{n+2}) + \cdots + f(\frac{1}{2n}) = \log(1 + \frac{1}{n+1}) + \log(1 + \frac{1}{n+2}) + \cdots + \log(1 + \frac{1}{2n}) = \lambda f'(0) = \lambda$. *Mais* $\log(1 + \frac{1}{n+1}) + \log(1 + \frac{1}{n+2}) + \cdots + \log(1 + \frac{1}{2n}) = \log(\frac{n+2}{n+1}) + \log(\frac{n+3}{n+2}) + \cdots + \log(\frac{2n+1}{2n}) = \log(\frac{(n+2)\ldots(2n+1)}{(n+1)\ldots 2n}) = \log(\frac{2n+1}{n+1}) \to \log(2)$ *soit* $\lambda = \log(2)$.

Exercice 22. *Si* f *n'est pas constante, on peut trouver* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(a) \neq 0$ *et la formule deTaylor-Lagrange nous donne*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \zeta_x \in (a, x) \quad : \quad f(x + a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2}f''(\zeta_x) \geq f(a) + xf'(a)$$

la dernière inégalité résultant du fait que f *convexe et deux fois dérivable implique* $f'' \geq 0$. *Si par exemple* $f'(a) > 0$ *on obtient alors une contradiction en faisant tendre* x *vers* $+\infty$ *(et vers* $-\infty$ *si* $f'(a) < 0$*...) CQFD. Le résultat subsiste si* f *est seulement convexe mais la preuve est plus délicate.*

Exercice 23. *Avec la formule de Taylor-Young nous avons* $\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \frac{f(x)+hf'(x)+h^2f''(x)/2+o(h^2)-2f(x)+f(x)-hf'(x)+h^2f''(x)/2+o(h^2)}{h^2} = f''(x) + \frac{o(h^2)}{h^2} \to f''(x)$ *lorsque* h *tends vers* 0. *La procédure est la même pour la seconde limite.*

Exercice 24. • *Taylor-Lagrange appliquée a* $x \mapsto e^x$ *à l'ordre* n *donne pour* $x > 0$ *:* $e^x = \sum_0^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_x} > \sum_0^n \frac{x^k}{k!}$ *où* $0 < \theta_x < x$. • *De même pour* $x > 0$ *:*$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+\theta_x)^5} > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ *et* $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1+\varphi_x)^4} < \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.• *C'est du même tonneau (appliquer Taylor-Lagrange à* $x \mapsto \sqrt{1+x}$*).*