UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - Feuille 5 (limites-continuité). ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Montrer de deux manière différentes (avec les ε, avec les suites) que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ 2, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$ *n'est pas continue à l'origine.*

Exercice 2. *Est-il possible de prolonger continuement à l'origine la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \cos(1/x)$?*

Exercice 3. *Pour les fonctions suivantes, préciser leur domaine de définition, de continuité et sur quels ensembles sont-elles prolongeables continuement ? $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, $g(x) = \frac{-5x^2+4x+1}{x^2-1}$.*

Exercice 4. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2, & \text{si } x < 0, \\ |x^3 + 2|, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ *; étudier la continuité de f, est-elle prolongeable continuement à l'origine ? montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$, combien y a-t'il de solutions dans $\mathbb{R}_+^\star$?*

Exercice 5. • *Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1, 1[$; même question pour $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$.*
• *Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Exercice 6. *Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. En considérant la fonction $g(x) = f(x) - x$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Illustrez graphiquement ce résultat.*

Exercice 7. *Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, montrer qu'il existe $m > 0$ tels que $f(x)+m < g(x)$, $\forall x \in [0, 1]$. Montrer sur un exemple que ce résultat tombe en défaut si on remplace $[0, 1]$ par $[0, 1[$ ou $[0, +\infty[$.*

Exercice 8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point $x = -1$ et satisfaisant à l'équation fonctionnelle $f(2x + 1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que f est constante.*

1) Montrer que $f\left(\frac{t-1}{2}\right) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2) Soit $t \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(u_n)_n$ par : $u_0 = t$, $u_{n+1} = \frac{u_n-1}{2}$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que si la suite $(u_n)_n$ converge vers a alors $a = -1$.

b) Montrer que la suite $(1 + u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Conclusion ?

c) Montrer par récurrence que $f(t) = f(u_n)$ pour tout entier n, puis que $f(t) = f(-1)$ et conclure.