**UNIVERSITE PAUL SABATIER** **2008/2009**

L1 - PCP - Feuille 3 (algèbre linéaire : déterminant, rang...).

**Exercice 1.** *Calculer le rang des matrices suivantes et, lorsque cela est possible leur déterminant.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.** *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}.$$

**Exercice 3.** *Calculer le déterminant et le rang de l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y, z).$$

**Exercice 4.** *Montrer que pour tout $a, b, c$ réels le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$ *est nul. Déterminer le rang de cette matrice suivant les valeurs des paramètres $a, b, c$.*

**Exercice 5.** *Déterminer déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$*, étudier son rang en fonction des paramètres $a, b, c$.*

**Exercice 6.** *Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? si oui préciser leur inverse, sinon leur rang.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 7.** *On pose* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ *et plus généralement pour $n \geq 2$ :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*a)Calculer $\Delta_2$ et $\Delta_3$.*
*b) Montrer que pour $n \geq 2$ : $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.*
*c) Montrer que pour $n \geq 2$ : $\Delta_n = n + 1$.*

**Exercice 8.** *Montrer que l'équation $A^2 = -I_3$ n'admet pas de solutions dans $M_3(\mathbb{R})$.*

**Exercice 9.** *Soit* $(A, B, C)$ *un triangle, montrer que* $\begin{vmatrix} \tan(\hat{A}/2) & \cos(\hat{A}) & 1 \\ \tan(\hat{B}/2) & \cos(\hat{B}) & 1 \\ \tan(\hat{C}/2) & \cos(\hat{C}) & 1 \end{vmatrix} = 0.$

**Exercice 10.** *Calculer les déterminants suivants en précisant les valeurs des paramètres qui annulent ces déterminants.*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}.$$

**Exercice 11.** *Calculer les déterminants de taille* $n$ *suivants en précisant les valeurs des paramètres qui annulent ces déterminants.*

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & a_n \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Vous trouverez d'autres documents ainsi que les archives des deux précédentes années à l'adresse suivante : http ://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/L1PCP.html