L1 - PCP - FEUILLE 1 : ESPACES VECTORIELS (1).

Exercice 1. *1) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels (munis des lois usuelles) ?* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$, $D(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$, $\mathbb{R}[x]$, $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2, \ x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x,x^2) \in \mathbb{R}^2, \ x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x,2x) \in \mathbb{R}^2, \ x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z=0\}$, *l'ensemble* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$, *l'ensemble* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ *des applications linéaires de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *l'ensemble des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *et* 2π*-périodiques, l'ensemble des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *et telles que* $f(0) \neq 0$.

2) les familles suivantes sont-elles libres ? liées ? $\{2,\pi\}$ *dans* $\mathbb{R}$, $\{(1,2),(3,4)\}$ *dans* $\mathbb{R}^2$, $\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ *dans* $\mathbb{R}^2$, $\{1,x,x^2\}$ *dans* $\mathbb{R}[x]$, $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ *dans* $\mathbb{R}[x]$, $\{i,i^2\}$ *dans* $\mathbb{C}$, *la famille* $\{x,x+1,x^2,x^2+1\}$ *dans* $\mathbb{R}_2[x]$, *la famille* $\{x,x+1,x^2\}$ *dans* $\mathbb{R}_2[x]$, *la famille* $\{1,e^x,e^{2x},\ldots,e^{nx}\}$ *dans* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

3) Montrer que la famille $\{e^x,e^{-4x}\}$ *est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle* $y''+3y'-4y=0$

Exercice 2. *1) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$.

2) Soient G,H *deux sous espaces vectoirels d'un espace vectoriel* E*, à quelle condition* $G\cup H$ *est-il un sous espace vectoriel de* E *? Montrer que,* $G+H$ *est toujours le plus petit sous espace vectoriel contenant* $G\cup H$.

Exercice 3. *Soit* $\mathscr{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y-z=a\}$*, donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{E}$ *soit un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et dans ce cas quel est sa dimension ?*

Exercice 4. *Soient* $\mathscr{E}_1 = vect\{(1,2,0),(0,1,1)\}, \mathscr{E}_2 = vect\{(1,1,1)\}$*. Montrer que ce sont deux sous espaces vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et déterminer* $\mathscr{E}_1\cap\mathscr{E}_2$ *et* $\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$.

Exercice 5. *Soient* $\mathscr{P} = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) paires\}$, $\mathscr{I} = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) impaires\}$*. Montrer que ce sont deux sous espaces vectoriel de* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *et que* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}) = \mathscr{P}\oplus\mathscr{I}$.