`Voici la liste des questions de cours pour les deux sessions complétée par des exemples de réponses acceptables.`

(1) `Soient` u, v `deux vecteurs d'un` $\mathbb{R}$`-espace vectoriel` E. `Définition de vect`$\{u, v\}$ `et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de` E.

– Nous avons $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \beta v,\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires dans E des vecteurs u et v.

– $\mathrm{vect}\{u, v\}$ n'est pas vide car $O_E = O_{\mathbb{R}}u + O_{\mathbb{R}}v \in \mathrm{vect}\{u, v\}$; maintenant soient $x, y \in \mathrm{vect}\{u, v\},\ \lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $x + \lambda y \in \mathrm{vect}\{u, v\}$: il existe $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha_1 u + \beta_1 v,\ y = \alpha_2 u + \beta_2 v$ par conséquent $x + \lambda y = \alpha_1 u + \beta_1 v + \lambda(\alpha_2 u + \beta_2 v) = (\alpha_1 + \lambda\alpha_2)u + (\beta_1 + \lambda\beta_2)v \in \mathrm{vect}\{u, v\}$, c'est bien un sous-espace vectoriel de E.

(2) `Dans un` $\mathbb{R}$`-espace vectoriel` E `de dimension finie, définition d'une famille libre, liée, d'une base.`

Une famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ de vecteurs de E est libre (on dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants) si et seulement si

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = O_E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = O_{\mathbb{R}}.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée (on dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont linéairement dépendants). Une famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice (i.e. $\mathrm{vect}\{u_1, \dots, u_n\} = E$) autrement dit, c'est une base si et seulement si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$.

(3) E, F `deux` $\mathbb{R}$`-espace vectoriels. Définition du noyau` $\ker(f)$ `d'une application linéaire` $f \in \mathscr{L}(E, F)$. `Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de` E.

– $\ker(f) = \{x \in E \ : \ f(x) = 0_F\}$.

– $f(O_E) = O_F$ donc $\ker(f)$ est non vide. Soient $x, y \in \ker(f),\ \lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de f nous avons $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = O_F + \lambda O_F = O_F$ i.e. $x + \lambda y \in \ker(f)$, c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

(4) `Définition de l'image Im`(f) `d'une application linéaire` $f \in \mathscr{L}(E, F)$. `Montrer que Im`(f) `est un sous espace vectoriel de` F `et que` f `est surjective si et seulement si` $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$.

– $\mathrm{Im}(f) = \{\, f(x),\ x \in E\}$. Comme $f(0_E) = O_F$, $O_F \in \mathrm{Im}(f)$ et si $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f),\ \lambda \in \mathbb{R}$ il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ par conséquent $y_1 + \lambda y_2 = f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1 + \lambda x_2)$ i.e. $y_1 + \lambda y_2 \in \mathrm{Im}(f)$ qui est donc bien un sous-espace vectoriel de F.

– $\mathrm{Im}(f)$ est donc un sous-espace vectoriel de F, si F est de dimension finie on aura $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim(F)$. Maintenant f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$ donc (cours sur la dimension) f est surjective si et seulement si $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim(F)$.

(5) Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, préciser les définitions « f est surjective » et « f est injective » ; montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

– Une fonction f est injective si et seulement si $f(x) = f(y) \iff x = y$.
– f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
– Si f est injective alors $x \in \ker(f) \implies (f(x) = O_F = f(O_E)) \implies (x = O_E)$ i.e. $\ker(f) = \{O_E\}$. Réciproquement si $\ker(f) = \{O_E\}$ alors $(f(x) = f(y)) \implies (f(x-y) = O_F) \implies x - y \in \ker(f)) \implies (x - y = O_E) \implies (x = y)$ et f est bien injective.

(6) Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

– Si A est inversible, il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$, par conséquent $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I_n) = 1$ qui assure que $\det(A) \neq 0$.
– Réciproquement si $\det(A) \neq 0$ notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admettant A comme matrice dans la base canonique. $\det(A) \neq 0$ implique (cours) que f est surjectif donc (cours) bijectif : il existe donc $f^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_{\mathbb{R}^n}$ en d'autres termes si B est la matrice de f^{-1} dans la même base nous aurons $BA = AB = I_n$: A est bien inversible.

(7) Définition d'une fonction continue et théorème des valeurs intermédiaires.

– Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dira que f est continue au point x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0 \ : \ |x - x_0| < \eta(\varepsilon, x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

– Théorème des valeurs intermédiaires : Toute application f continue sur un intervalle $[a, b]$ prends toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, en d'autres termes, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

(8) Définition d'une fonction dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$ et énoncé du théorème des accroissements finis.

– Soient $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, $c \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$; on dira que f est **dérivable** au point c si et seulement si la limite :

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(c + \varepsilon) - f(c)}{\varepsilon} = l \in \mathbb{R}$$

existe et on écrira $f'(c) = l$
– Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(9) `Formule de Taylor-Young et définition d'un développement limité à l'origine.`

– Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable sur $]a,b[$, alors pour tout $c \in]a,b[$ et tout x dans un voisinage de c :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + (x-c)^n \varepsilon(x),$$

où $x \mapsto \varepsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers c.

– Soient $n \in \mathbb{N}$, I un voisinage de 0 et $f : I \to \mathbb{R}$. On dira que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (et on écrira $DL_n(0)$) si et seulement si, il existe un polynôme P à coefficients réels de degré $\leq n$ tel que

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \ x \in I, \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le polynôme P est la partie régulière ou principale du développement limité.

(10) `Développements limités des fonctions usuelles.`

Tous ces DL sont à l'origine i.e. la fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x).$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$