UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - CORRIGÉ DEVOIR MAISON 1. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *Montrer que l'ensemble*

$$\mathscr{E} = \{f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (\exists\,(a,\varphi) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = a\cos(x-\varphi)\}$$

est un $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Solution : On notera pour $a, \varphi \in \mathbb{R} \ : \ f_{a,\varphi}(x) = a\cos(x-\varphi)$. $\mathscr{E}$ est inclu dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il est donc suffisant de montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On va en fait montrer que $\mathscr{E} = \text{vect}\{\sin,\ \cos\}$ ce que l'on pouvait rapidement soupçonner puisque $f_{1,0}(x) = \cos(x)$ et $f_{1,-\pi/2}(x) = \sin(x)$ sont dans $\mathscr{E}$ et $a\cos(x-\varphi) = a\cos(x)\cos(\varphi) + a\sin(x)\sin(\varphi) \in \text{vect}\{\sin,\ \cos\}$; comme on va le voir plus bas, c'est la stabilité par addition qui est délicate.

– $f_{0,\varphi} \equiv 0$, la fonction nulle est donc dans $\mathscr{E}$.

– Soient $f_{a,\varphi}, f_{b,\theta} \in \mathscr{E}$ deux vecteurs de $\mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; il s'agit de montrer que $f_{a,\varphi} + \lambda f_{b,\theta} \in \mathscr{E}$ et ce n'est pas si simple : on peut écrire pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{a,\varphi}(x) + \lambda f_{b,\theta}(x) &= a\cos(x-\varphi) + \lambda b\cos(x-\theta) \\ &= a\cos(x)\cos(\varphi) + a\sin(x)\sin(\varphi) + \lambda(b\cos(x)\cos(\theta) + b\sin(x)\sin(\theta))) \\ &= (a\cos(\varphi) + \lambda b\cos(\theta))\cos(x) + (a\sin(\varphi) + \lambda b\sin(\theta))\sin(x) \\ &= A\cos(x) + B\sin(x), \end{aligned}$$

où $A = a\cos(\varphi) + \lambda b\cos(\theta),\ B = a\sin(\varphi) + \lambda b\sin(\theta)$. On a $A^2 + B^2 = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$ soit $f_{a,\varphi}(x) + \lambda f_{b,\theta}(x) = Acos(x) = f_{A,0}(x) \in \mathscr{E}$ soit $f_{a,\varphi}(x) + \lambda f_{b,\theta}(x) = B\sin(x) = B\cos(x+\pi/2) = f_{B,-\pi/2}(x) \in \mathscr{E}$. On peut donc supposer que $A^2 + B^2 \neq 0$, dans ce cas écrivons

$$f_{a,\varphi}(x) + \lambda f_{b,\theta}(x) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x)\right)$$

et le vecteur $(A/\sqrt{A^2+B^2}, B/\sqrt{A^2+B^2})$ est de norme 1 : il est donc sur le cercle unité i.e. il existe $\gamma \in [0, 2\pi[$ tel que $A/\sqrt{A^2+B^2} = \cos(\gamma),\ B/\sqrt{A^2+B^2} = \sin(\gamma)$, si bien que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} f_{a,\varphi}(x) + \lambda f_{b,\theta}(x) &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos(\gamma)\cos(x) + \sin(\gamma)\sin(x)) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\gamma) \end{aligned}$$

soit $f_{a,\varphi} + \lambda f_{b,\theta} = f_{\sqrt{A^2+B^2},\gamma} \in \mathscr{E}$: CQFD ! $\mathscr{E}$ est donc un espace vectoriel et vu la remarque faire en cours de redaction c'est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.

Exercice 2. *Dans* $\mathbb{R}^4$*, comparer les sous-espaces* F *et* G *suivants :*

$$\begin{aligned} F &= Vect\{(1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,-5)\} \\ G &= Vect\{(-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

Solution : F est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ admettant une famille génératrice constituée de 3 vecteurs : $\{u = (1,0,1,1), v = (-1,-2,3,-1), w = (-5,-3,1,-5)\}$, étudions la liberté de ces vecteurs : $\alpha u + \beta v + \gamma w = O_{\mathbb{R}^4}$ équivaut au système

$$\begin{cases} \alpha - \beta - 5\gamma &= 0 \\ -2\beta - 3\gamma &= 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta - 5\gamma &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - \beta - 5\gamma &= 0 \\ \beta &= -3\gamma/2 \\ \alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= -3\gamma/2 \\ \alpha &= 7\gamma/2 \end{cases}$$

La famille est donc liée, par exemple $\gamma = 1$ donne $7u/2 - 3v/2 + w = O_{\mathbb{R}^4}$. Les deux vecteurs u et v sont clairement (faites le !) libres : $F = \text{vect}\{u, v\}$ est donc de dimension 2 et admet pour base $\{u, v\}$.
Pour G on procède de même, c'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ admettant pour base $\{a = (-1, -1, 1, -1), b = (4, 1, 2, 4)\}$.
Comparons ces deux espaces : étudions l'inclusion $G \subset F$, elle sera réalisée si et seulement si les vecteurs a et b sont dans F. $a \in F$ ssi il existe α, β réels tels que $a = \alpha u + \beta v$ on trouve facilement $a = -u/2 + v/2$ (sinon résolvez le système...) de même $b = 7u/2 - v/2$ (il suffit de regarder la seconde composante qui donne β car le second coef. de u est nul, on déduit alors α). Ainsi $G \subset F$ et comme ils ont même dimension $G = F$.

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et x, y, z, t une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres ?*

(1) $x, 2y, z$.

(2) x, z.

(3) $x, 2x + t, t$.

(4) $3x + z, z, y + z$.

(5) $2x + y, x - 3y, t, y - x$.

Solution : (1) et (2) : Vu le cours, toute sous famille d'une famille libre est libre : les familles $\{x, y, z\}$ et $\{x, z\}$ sont libres et par conséquent aussi $\{x, 2y, z\}$.
(3) $(2x + t) - t = x$ donc la famille $\{x, 2x + t, t\}$ est liée.
(4) $a(3x + z) + bz + c(y + z) = 0 \iff 3ax + cy + (3a + b + c)z = 0$ qui implique (la famille $\{x, y, z\}$ est libre) $3a = c = 3a + b + c = 0$ soit $a = b = c = 0$ et la famille est libre.
(5) La dernière famille est forcément liée car ce sont des combinaisons linéaires des trois vecteurs x, y, t qui engendrent un espace de dimension 3 et pas 4.

☯ ☢ ☯ Fin du corrigé ☯ ☢