UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - CORRIGE du DEVOIR MAISON 6. ☯ ☢ ☯

Exercice 1. *En appliquant convenablement la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 1 *(ie avec un reste d'ordre 2) à la fonction* $x \mapsto (1+x)^\alpha$ *montrer que pour tout* $x > -1$ *et* $x \neq 0$ *:*

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x \quad \text{si } \alpha > 1 \text{ où } \alpha < 0,$$
$$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x \quad \text{si } 0 < \alpha < 1.$$

Solution : On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ entre les point 0 et x où $x > -1$ (elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$) : il existe $\zeta_x \in]0, x[$ (ou $]x, 0[$ si $-1 < x < 0$) tel que :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\zeta_x)^{\alpha-2},$$

et il ne reste plus qu'à observer que $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\zeta_x)^{\alpha-2} > 0$ si $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$ et < 0 si $0 < \alpha < 1$.

Exercice 2. *Pour* $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_+^\star$ *on note*

$$\overline{x_a} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ \overline{x_g} = (x_1 \dots x_n)^{1/n},\ M = \max_{1 \leq i \leq n} x_i,\ m = \min_{1 \leq i \leq n} x_i,\ \sigma^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2.$$

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 *à la fonction* log *en les points* $\overline{x}, x_i \in [m, M],\ (1 \leq i \leq n)$ *pour en déduire*

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

Préciser le cas d'égalité et retrouver l'inégalité arithmético-géométrique (voir exercice 4 feuille 6).

Solution : Appliquons donc à la fonction $x \mapsto \log(x)$ la formule de Taylor-Lagrange en les points[1] $\overline{x_a}, x_i \in [m, M],\ (1 \leq i \leq n)$:

$$\log(x_i) = \log(\overline{x_a}) + \frac{x_i - \overline{x_a}}{\overline{x_a}} - \frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{2\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2},$$

sommons pour $1 \leq i \leq n$ ces égalités

$$\log(x_1 \dots x_n) = n\log(\overline{x_a}) + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{2\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2}$$

que l'on peut encore écrire

$$\log\left(\frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $m \leq \overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a}) \leq M,\ (1 \leq i \leq n)$ donne

$$\frac{\sigma^2}{2M} \leq \log\left(\frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}}\right) \leq \frac{\sigma^2}{2m}$$

où encore

$$(✘) \qquad \exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

Comme $1 \leq \exp(\sigma^2/2M)$ on retrouve la forme classique de l'inégalité inégalité Arithmético-Géométrique : $\overline{x_g} \leq \overline{x_a}$; en outre (✘) assure que $\overline{x_g} = \overline{x_a}$ si et seulement si $\sigma = 0$ i.e. si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Exercice 3. *On pose pour* $x \in \mathbb{R}^\star$ *:* $f(x) = (ch(x))^{1/x}$.

a) Montrer que $f(x)f(-x) = 1,\ x \in \mathbb{R}^\star$.

b) Etudier les variations de f *sur* $\mathbb{R}^\star$.

c) Préciser les limites de f *en* $\pm\infty$.

d) Montrer (ou admettez si les DL n'ont pas encore étés abordés) qu'au voisinage de l'origine $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$, *en déduire que* f *se prolonge à l'origine en une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et donner l'allure du graphe de* f.

1. On exclut le cas trivial où tous les x_i sont nuls ainsi que, quitte à diminuer n, celui où certains x_i sont nuls.

Solution : (a) Il suffit de l'écrire, cette relation nous permet de travailler sur $\mathbb{R}_+^\star$ les variations sur $\mathbb{R}_-^\star$ en découleront.
(b) Pour $x > 0$ nous avons $f'(x) = \big(\exp(x^{-1}\log(\mathrm{ch}(x)))\big)' = x^{-2}f(x)[x\mathrm{th}(x) - \log(\mathrm{ch}(x))]$ et si l'on pose $g(x) = x\mathrm{th}(x) - \log(\mathrm{ch}(x)$ comme $g'(x) = x\mathrm{ch}^{-2}(x) > 0$ et $g(0) = 0$ on en déduit que $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis sur $\mathbb{R}_-^\star$ vu (a).
(c) avec les DL on montre facilement qu'en $+\infty$: $x^{-1}\log(\mathrm{ch}(x)) = 1 + \varepsilon(x)$ où $\lim_{+\infty}\varepsilon(x) = 0$ donc $\lim_{+\infty} f(x) = e$ et $1/e$ en $-\infty$ vu (a). De même, au voisinage de l'origine $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$ où $\lim_0 \varepsilon(x) = 0$: le cours nous assure alors qu'en posant $f(0) = 1$ on prolonge f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 1/2$. Il est alors facile d'esquisser le graphe de f (remarquez bien que f semble changer de concavité au point $(0, 1)$, la courbe traverse donc la tangente en ce point, pour s'en assure proprement il faudrait pousser le DL_0 au moins à l'ordre 3 car en un tel point il n'y aura pas de terme d'ordre 2... pourquoi ? ?).