**Exercice 1.** *En appliquant pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \log(x)$ sur $[n, n+1]$ en déduire la limite* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

**Solution :** Soit $n \geq 1$, on applique de théorème des accroissements finis à $f(x) = \log(x)$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ : il existe un réel $k < x_k < k+1$ vérifiant

$$\frac{\log(k+1)-\log(k)}{k+1-k} = \log(k+1)-\log(k) = f'(x_k) = \frac{1}{x_k} < \frac{1}{k},$$

ce qui nous donne les inégalités :

$$\begin{aligned}
\log(n+1)-\log(n) &< \frac{1}{n}\\
\log(n)-\log(n-1) &< \frac{1}{n-1}\\
\dots\quad &< \ \dots\\
\log(3)-\log(2) &< \frac{1}{2}\\
\log(2)-\log(1) &< 1
\end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à sommer ces inégalités pour en déduire

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \log(n+1)$$

qui nous donne le résultat désirée via le « théorème des gendarmes ».

**Exercice 2.** *Calculer de deux manières différentes $(x^{2n})^{(n)}$ ; en déduire que* $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \dfrac{(2n)!}{n!^2}$.

**Solution :** Il est déja clair que $(x^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}x^n$. Pour calculer cette dérivée autrement on va appliquer la formule de Leibnitz en écrivant $x^{2n} = x^n \cdot x^n$ :

$$\begin{aligned}
(x^{2n})^{(n)} = (x^n\cdot x^n)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(x^n)^{(n-k)}(x^n)^{(k)}\\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-(n-k)}\frac{n!}{k!}x^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^n n!\binom{n}{k}^2 x^n = \left(n!\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2\right)x^n
\end{aligned}$$

soit $\frac{(2n)!}{n!}x^n = \left(n!\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2\right)x^n$ qui nous donne le résultat désiré.

**Exercice 3.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *trois fois dérivable au point* $a$*. Avec Taylor-Young, montrer que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4} \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix} = f'(a)f^{(3)}(a) - f^{(2)}(a)^2.$$

**Solution :** Si on soustrait la première ligne aux deux autres on a :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 0 & f(a+h)-f(a) & f(a+2h)-f(a+h) \\ 0 & f(a+2h)-f(a) & f(a+3h)-f(a+h) \end{vmatrix} \\ &= (f(a+h)-f(a))(f(a+3h)-f(a+h)) - (f(a+2h)-f(a+h))(f(a+2h)-f(a)).\end{aligned}$$

Maintenant comme $f$ est trois fois dérivable au point $a$, la formule de Taylor-Young donne :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + h^3\varepsilon(h), \\ f(a+2h) &= f(a) + 2hf'(a) + \frac{4h^2}{2}f''(a) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(a) + h^3\varepsilon(h), \\ f(a+3h) &= f(a) + 3hf'(a) + \frac{9h^2}{2}f''(a) + \frac{27h^3}{6}f^{(3)}(a) + h^3\varepsilon(h), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + h^3\varepsilon(h) \\ f(a+3h)-f(a+h) &= 3hf'(a) + \frac{9h^2}{2}f''(a) + \frac{27h^3}{6}f^{(3)}(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + h^3\varepsilon(h) \\ &= 2hf'(a) + 4h^2f''(a) + \frac{13h^3}{3}f^{(3)}(a) + h^3\varepsilon(h) \\ (f(a+h)-f(a))(f(a+3h)-f(a+h)) &= \left(hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + h^3\varepsilon(h)\right)\left(2hf'(a) + 4h^2f''(a) + \frac{13h^3}{3}f^{(3)}(a) + h^3\varepsilon(h)\right) \\ &= 2h^2f'(a)^2 + 5h^3f''(a)f'(a) + h^4\left(2f''(a)^2 + \frac{14}{3}f'''(a)f'(a)\right) + h^4\varepsilon(h), \end{aligned}$$

remarquez bien que, vu les facteurs, les $h^3\varepsilon(x)$ deviennent des $h^4\varepsilon(x)$ donc des choses qui, divisées par $h^4$ tendent vers 0 (ils absorbent donc tout les termes de degré $\geq 5$.... Un calcul pas trés rigolo nous donne :

$$\begin{aligned} (f(a+2h)-f(a+h))(f(a+2h)-f(a)) &= \left(2hf'(a) + 2h^2f''(a) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a)\right)\left(2hf'(a) + 2h^2f''(a) + \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(a)\right) \\ &\quad + h^4\varepsilon(h) \\ &= \left(hf'(a) + \frac{3h^2}{2}f''(a) + \frac{7h^3}{6}f^{(3)}(a)\right)\left(2hf'(a) + 2h^2f''(a) + \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(a)\right) + h^4\varepsilon(h) \\ &= 2h^2f'(a)^2 + 5h^3f''(a)f'(a) + h^4\left(3f''(a)^2 + \frac{11}{3}f^{(3)}(a)f'(a)\right) + +h^4\varepsilon(h) \end{aligned}$$

finalement :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^4}\begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{2h^2f'(a)^2 + 5h^3f''(a)f'(a) + h^4\left(2f''(a)^2 + \frac{14}{3}f'''(a)f'(a)\right) - 2h^2f'(a)^2 - 5h^3f''(a)f'(a) - h^4\left(3f''(a)^2 + \frac{11}{3}f^{(3)}(a)f'(a)\right) + h^4\varepsilon(h)}{h^4} \\ &= f(a)f^{(3)}(a) - f^{(2)}(a)^2 + \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a)f^{(3)}(a) - f^{(2)}(a)^2. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable et telle que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$*.*

*a) Donner un exemple d'une telle fonction et la représenter graphiquement.*

*b) On pose pour* $x \in ]-\pi/2, +\pi/2[$ : $g(x) = f(\tan(x))$*. Montrer que* $g$ *est continue et dérivable sur* $]-\pi/2, +\pi/2[$ *et se prolonge continuement en les points* $-\pi/2$ *et* $+\pi/2$*, on désigne encore par* $g$ *ce prolongement.*

*c) Expliquer pourquoi on peut appliquer le théorème de Rolle à* $g$ *et montrer que la dérivée de* $f$ *doit s'annuler au moins une fois sur* $\mathbb{R}$*. Ce résultat subsiste-t-il si* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *est seulement dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ *?*

**Solution :** a) Considérer par exemple $f(x) = l + \frac{1}{1+x^2}$.
b) La fonction tangente est continue et dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ : la fonction $g = f \circ \tan$ est donc (cf. le cours) continue et dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$. En outre comme $\lim_{x\to\pi/2_-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, le théorème sur la composition des limites assure que $\lim_{x\to\pi/2_-} g(x) = l$ : on peut donc prolonger continuement $g$ au point $\pi/2$ en posant $g(\pi/2) = l$. On montre de même que $g$ se prolonge continuement au point $-\pi/2$ en posant $g(-\pi/2) = l$.
c) $g$ ainsi prolongée est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$, dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et $g(-\pi/2) = g(\pi/2) = l$ : on peut donc lui appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in ]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais $g'(c) = \frac{f'(\tan(c))}{1+c^2}$ donc $f'(\tan(c)) = 0$ et $f$ s'annule bien au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Ce résultat (on peut parler d'un théorème de Rolle généralisé : on a remplacé l'intervalle $[a, b]$ par $\mathbb{R}$) tombe en défaut si $f$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, il suffit de considérer une telle fonction qui n'est pas dérivable juste en le point où elle atteint l'extrema, considérez par exemple $f(x) = \arctan(|x|)$.

**Solution :**

**Exercice 5.** *1) Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ : $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$.

*2) En quels points de son domaine de définition la fonction arcsin est-elle continu dérivable ?*

*3) Quel est le domaine de définition de* $f(x) = \mathit{arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2\mathit{arctan}(x)$ *?*

*4) Montrer que* $f$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

*5) Calculer* $f'(x)$ *pour* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$.

*6) En déduire une expression simple de* $f'$ *puis de* $f$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$. $f$ *est-elle dérivable en les points* $1$ *et* $-1$ *?*

*7) Représenter graphiquement* $f$.

**Solution :** a) Pour tout réel $x$ : $(1+x)^2 \geq 0$ et $(1-x)^2 \geq 0$ et par conséquent $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ et $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1$, CQFD.
b) c) et d) La fonction arctan est dérivable (donc continue sur $\mathbb{R}$), la fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. $f$ est donc continue sur $\{ x_i n\mathbb{R} \ : \ \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1\} = \mathbb{R}$ et dérivable en tous les réels $x$ tels que $\dfrac{2x}{1+x^2} = 1$ soit sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ (observez bien que pour le moment nous ne savons pas si $f$ est ou non dérivable en ces deux points, mais elle pourrait trés bien l'être...).
e) et f) Un calcul élémentaire nous donne $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{1-x^2}{|1-x^2|} - 1\right) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in ]-\infty, -1[\cup]1, \\ 0 & \text{si } x \in ]-1, 1[. \end{cases}$
$f$ est donc égale à $-4\arctan(x)$ sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et égale à $0$ sur $[-1, 1]$ ; elle n'est pas dérivable en les points $\pm 1$ (par exemple $f'_g(1) = 0, \ f'_d(1) = -2$) la représentation graphique est facile.