UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - DERIVATION (COURS-EXERCICES). ☯ ☢ ☯

1. Dérivation, premières propriétés.

Définition : Soient $I =]a,b[$ un intervalle ouvert, $c \in I$ et $f \; : \; I \to \mathbb{R}$; on dira que f est **dérivable** au point c si et seulement si la limite :

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(c+\varepsilon)-f(c)}{\varepsilon} = l \in \mathbb{R}$$

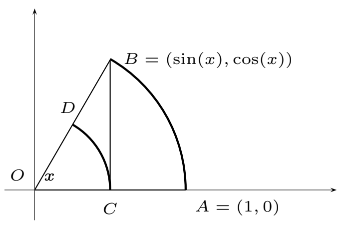
existe et on écrira $f'(c) = l$, c'est la dérivée de f au point c. On dira que f est dérivable sur I si elle l'est en chaque point de I. Vu la définition d'une limite, f sera dérivable au point c, si et seulement si les « dérivée à gauche » ($\lim_{x\to c, x<c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$) et « à droite » ($\lim_{x\to c, x>c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$) de f en c existent et sont égales.
Enfin, si $I = (a,b]$ on dira que $f \; : \; I \to \mathbb{R}$ est dérivable au point b si la limite

$$\lim_{x\to b, x<b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

existe, c'est la « dérivée à gauche » au point b et on a une définition analogue pour un intervalle fermé à gauche.

Exercices-exemples : • La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, admet à l'origine des dévivées à droite et à gauche distinctes ($\lim_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_+} \frac{|x|}{x} = 1 = f'_d(0)$ et $\lim_{x\to 0_-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_-} \frac{|x|}{x} = -1 = f'_g(0)$: elle n'est donc pas dérivable à l'origine. On peut par contre dire que sa restriction g à $\mathbb{R}_+$ est dérivable avec $g'(0) = g'_d(0) = 1$.

• La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$ est continue, non dérivable à l'origine et dans ce cas il n'y a pas de dérivées à droite et à gauche : par exemple $\lim_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$.
• La fonction sinus définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos(x)$. Commencons par montrer que la fonction sinus est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = 1$ autrement dit montrons la formule bien connue $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. La fonction $\sin(x)/x$ est paire, supposons donc $0 < x < \pi/2$ et dans la figure ci dessous



nous nous assure que :

aire du secteur angulaire$(OCD) \leq$ aire du secteur triangulaire$(OCB) \leq$ aire du secteur angulaire(OAB)

car les secteurs sont inclus les uns dans les autres. En outre l'aire d'un secteur angulaire d'angle α et de rayon r est $\alpha r^2/2$, si bien que les deux inégalités précédentes s'écrivent :

$$\frac{x\cos^2(x)}{2} \leq \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \leq \frac{x}{2}$$

qui équivaut puisque $0 < x < \pi/2$ à

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

on peut maintenant passer à la limite et par le théorème des gendarmes il vient $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. On en déduit facilement la dérivée de la fonction cosinus à l'origine :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} \cdot \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Maintenant pour calculer la dérivée de la fonction sinus en un point non nul (disons c) on se ramène à la situation précédente par les formules trigonométriques classiques :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(c+h)-\sin(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(c)\cos(h)+\sin(h)\cos(c)-\sin(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\cos(c) \cdot \frac{\sin(h)}{h} + \sin(c) \cdot \frac{\cos(h)-1}{h}\right) = \cos(c)$$

On en déduit enfin la dérivée de la fonction cosinus ($(\cos)' = -\sin$..) avec la formule $\cos(x) = \sin(x+\pi/2)$ (exercice).

Propriétés : Soient $I =]a,b[$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en un point $c \in I$; alors :

1) $f+g$ est dérivable au point c et $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.
2) Pour tout réel λ, λf est dérivable au point c et $(\lambda f)'(c) = \lambda f'(c)$.
3) fg est dérivable au point c et $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
4) Si $g(c) \neq 0$, alors f/g est dérivable au point c et $(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)}$.
5) Si $h : f(I) \to \mathbb{R}$ est dérivable au point $f(c)$ alors $h \circ f$ est dérivable au point c et $(h \circ f)'(c) = h'(f(c))f'(c)$.

Démonstration : Les démonstrations de (1) et (2) résultent de la définition de la limite. (3) est un exercice. Pour (4) on commence par le cas ou $f \equiv 1$ en remarquant que :

$$\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(c)}\right)\frac{1}{x-c} = -\frac{g(x)-g(c)}{x-c} \cdot \frac{1}{g(c)g(x)}$$

qui tends vers $-g'(c)/g^2(c)$. On applique alors (3) sous la forme $f/g = f \cdot (1/g)$ et le résultat suit. Pour (5) c'est un peu plus délicat on le fera ensemble.... $\square$

Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in I$, si f est dérivable au point c alors f est continue au point c.

Démonstration : Posons pour $x \in I \setminus \{c\}$: $h(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)$, f étant dérivable au point c, nous avons $\lim_{x\to c} h(x) = 0$ et à fortiori :

$$0 = \lim_{x\to c}(x-c)h(x) = \lim_{x\to c}(f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)) = \lim_{x\to c} f(x) - f(c)$$

par conséquent $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, f est bien continue au point c. $\square$

Remarques : • La réciproque est bien entendu incorrecte vu l'exemple canonique $f(x) = |x|$ vu plus haut.

• Il faut aussi se garder de croire que si f est dérivable sur I alors f' (qui est donc définie sur I) sera continue, ici l'exemple canonique étant $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$, en effet f esr dérivable à l'origine car $\left|\frac{|f(x)-f(0)|}{x}\right| \leq |x|$ qui tends vers 0 avec x donc $f'(0) = 0$; elle est bien sur dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ avec $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ le premier terme est majoré par $2|x|$ et tends vers zéro avec x alors que le le second n'a pas de limite comme $\sin(1/x)$ (voir le chapitre continuité) ; en particulier f' n'est pas continue à l'origine. (pour la culture bien que n'étant pas forcément continue l'application dérivée n'est pas toutefois complétement irrégulière au sens ou elle vérifie tout de même la propriété des valeurs intermédiaires, c'est le théorème de Darboux, on peut aussi démontrer que f' est tout de même continue sous un sous ensemble de I assez « gros » un peu comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$...).

2. Dérivées d'ordre supérieur, formule de Leibnitz.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable, si f' est a son tour dérivable sur on dira que f est deux fois dérivable et on notera $f^{(2)} = f'' = (f')'$; de proche en proche on définit la dérivée n-ième de f notée $f^{(n)}$ à tout ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ (lorsque cela a bien un sens). $\mathscr{C}^1(I)$ désignera l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur I telles que f' soit continue sur I, pour $n \geq 1$, $\mathscr{C}^n(I)$ est l'espace vectoriel des fonctions n fois dérivables sur I à dérivées continues ; enfin $\mathscr{C}^\infty(I)$ désigne l'espace vectoriel des fonction indéfiniement dérivables sur I.

Formule de Leibnitz : Soient $n \geq 1$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad \forall\, x \in I.$$

Démonstration : Par récurrence sur n, exercice. □

Exercice : *Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n(1-x)^n$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = \frac{(2n)!}{n!^2}$.*
Bonus : retouver ce résultat via un argument de combinatoire.

Soit le polynôme de degré $2n$: $p(x) = x^n(1-x)^n$; le coefficient de x^{2n} vaut $(-1)^n$ mais aussi $p^{(2n)}(0)/(2n)!$ soit $p^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$. D'un autre coté, calculons la dérivée n-ième de p, avec les formules de Leibnitz et Newton, on a :

$$\begin{aligned} p^{(n)}(x) = (x^n(1-x)^n)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(n-k)} \left((1-x)^n\right)^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n(n-1)\dots(n-(n-k)+1)x^{n-(n-k)}(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)(1-x)^{n-k} \\ &= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^k(x-1)^{n-k} \end{aligned}$$

cette dernière expression assure que le coefficient de x^n dans $p^{(n)}(x)$ est $n!(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ mais aussi $(p^{(n)})^{(n)}(0)/n!$ ou encore $p^{(2n)}(0)/n! = (-1)^n(2n)!/n!$ vu la première remarque, en identifiant ces deux quantités on trouve la formule désirée.

3. Extrémas, Théorème de Rolle et des accroissements finis.

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$, on dira que f présente au point $c \in I$ un **minimum local** (resp. un **maximum local**) s'il existe un voisinage $]c-\eta, c+\eta[$ de c dans I tel que $f(x) \geq f(c),\ \forall\, x \in]c-\eta, c+\eta[$ (resp. $f(x) \leq f(c),\ \forall\, x \in]c-\eta, c+\eta[$). Si l'inégalité est vraie pour tout $x \in I$, on dira que c est un minimum (resp. maximum) **global**. L'ensemble des **extrémas** de f sur I est l'ensemble de ses minimaux et maximaux.

Proposition : Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable ; si f présente au point c un extréma local alors $f'(c) = 0$.

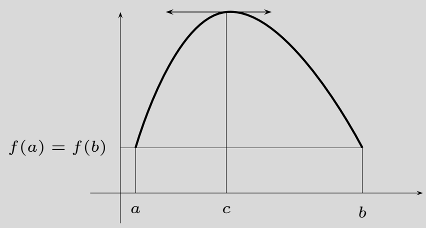
Démonstration : (pour un max local) Il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \leq f(c),\ \forall\, x \in]c-\eta, c+\eta[$; comme f est dérivable au point c on a

$$f'_d(c) = \lim_{x \to c,\ x > c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = \lim_{x \to c,\ x < c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_g(c),$$

et comme $f(x) \leq f(c),\ \forall\, x \in]c-\eta, c+\eta[$, la première limite est négative alors que la seconde est positive : la seule alternative est $f'(c) = 0$, CQFD. □

Remarques : Il faut être trés attentif aux hypothèses :
• le point c doit être intérieur, par exemple sur $[-1, 2]$ la fonction $f(x) = x^2$ atteint son maximum au point $x = 2$ où $f'(2) = 4 \neq 0$.
• f doit être partout dérivable, par exemple l'application $f(x) = |x|$ atteint son minimum au point $x = 0$ où elle n'est pas dérivable...

Théorème de Rolle : Soit f une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$ (voir la figure ci dessous).



Démonstration : f est continue sur le fermé borné $[a, b]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes : $\exists\, c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = \sup_{[a,b]} f(x),\ f(d) = \inf_{[a,b]} f(x)$. Alors si c ou d est dans $]a, b[$ l'extréma est local et avec la proposition précédente f' s'annule en ce point ; sinon, c et d sont dans $\{a, b\}$ soit par exemple $f(a) = \sup_{[a,b]} f(x),\ f(b) = \inf_{[a,b]} f(x)$; mais $f(a) = f(b)$: f est donc constante sur $[a, b]$ en particulier $f' \equiv 0$ sur $]a, b[$, CQFD. □

Remarques : On ne demande pas à f d'être dérivable aux extrémités a et b mais il est impératif quelle soit continue en ces points : considérez par exemple la fonction $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in]1, 2[$ et $f(1) = f(2) = 4$.

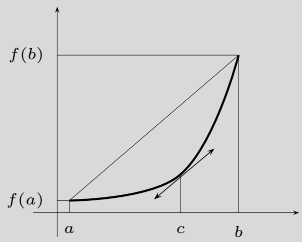
Exercices : • Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Si $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f(x)$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$ (appliquer Rolle à $g(x) = f(\tan(x))$...).
• Soient f, g, h trois fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ on pose

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F'(x_0) = 0$. Que retrouvez vous si $g(x) = x$ et $h(x) = 1$?
• Soient $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$ et$P(x) = x^n + ax + b$. Montrer que si n est pair, P a au plus deux racines réelles distinctes, et au plus trois si n est impair.
• Montrer que le polynôme $P(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$ admet une unique racine réelle.

• Montrer que si toutes les racines d'un polynôme P de degré $d \geq 2$ sont réelles, alors il en est de même pour les racines de P'

Théorème des accroissements finis : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$, si f est dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Remarque : Comme l'illustre la figure ci-dessus, l'interprétation graphique du théorème des valeurs intermédiaires est fort simple : la quantité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$; il existe donc toujours un point $a < c < b$ en lequel la tangente au graphe de f est parallèle à cette corde. C'est un outil d'une efficacité redoutable, il permet entre autre d'établir souvent facilement des inégalités non triviales.

Démonstration : C'est une conséquence du théorème de Rolle : considérons la fonction définie par

$$\forall x \in [a,b] \ : \ g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Vu les hypothèses sur f, g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a) = g(b)$: on peut donc lui appliquer Rolle : il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, i.e. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. CQFD. □

Exemple : Soient $a < b < c$ et f une fonction continue sur $]a,b[$; si f est dérivable sur $]a,b[\setminus\{c\}$ et si $\lim_{x\to c} f'(x)$ existe (disons λ), alors f est dérivable au point c et $f'c) = \lambda$.

4. Formules de Taylor.

La formule de Taylor-Lagrange : Soit $f \in \mathscr{C}^n([a,b])$, si f est de plus $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Remarques : • On utilise souvent ce résultat avec $b = a + h$ i.e. :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \\ &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{(n+1)}, \ \text{où } c \in (a, a+h), \end{aligned}$$

et encore plus souvent avec $a = 0$ et $b = x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{(n+1)}, \ \text{où } c \in (0, x). \end{aligned}$$

Il faut aussi remarquer que le réel c dépend des extrémités a et b de l'intervalle, en particulier, dans la dernière formule, c dépend de x.
• Remarquez que pour $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis : $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

Démonstration : On considére la fonction auxilliaire g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{\lambda}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

où la constante λ est choisie de telle sorte que $g(a) = g(b)$, autrement dit :

(1) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{\lambda}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = f(b),$$

(c'est une équation de degré 1 en λ à coefficient dominant non nul : elle admet une unique solution) Ainsi définie g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $g(a) = g(b)$, on peut donc lui appliquer le théorème de Rolle : il existe $a < c < b$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui équivaut à (faites le calcul) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(b-c)^{(k-1)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k + \frac{\lambda}{n!}(b-c)^n = 0$$

ou encore $\lambda = f'(c)$, il ne reste plus qu'à reporter dans (1). CQFD. □

La formule de Taylor-Young : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable sur $]a, b[$, alors pour tout $c \in]a, b[$ et tout x dans un voisinage de c :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + (x-c)^n \varepsilon(x),$$

où $x \mapsto \varepsilon(x)$ est une fonction qui tends vers 0 lorsque x tends vers c. En particulier si on peut faire $c = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Démonstration : Vous la trouverez dans votre manuel favori. □

Remarques : • Nous avons donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \begin{cases} (x-a)^n \varepsilon(x), & (Taylor - Young), \\ (x-a)^{n+1} \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}, \ c_x \in (a, x) & (Taylor - Lagrange). \end{cases}$$

La différence entre ces deux formules est donc le « forme » du reste où de l'erreur commise lorsque l'on remplace $f(x)$ par le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$; dans la formule de Taylor-Lagrange les hypothèses sont plus fortes sur la fonction f qui doit être $n+1$-fois dérivable au point a, alors que pour Taylor-Young, f ne l'est seulement que n, l'expression du reste est donc plus « précise ».
• Ces formules nous disent que si l'on remplace $f(x)$ par $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ alors l'erreur que l'on commet est de la forme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ ou $(x-a)^{n+1} \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$ et ces dernières quantités sont « petites » avec n à condition que x soit suffisament **proche** de a (et que f soit assez régulière). Il est essentiel de comprendre que le reste d'un développement limité en un point a n'est petit qu'au voisinage du point a.

Exercices-exemple : • *Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable vérifiant $f(0) = f'(0) = f(-1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $-1 < c < 1$ tel que $f'(c) \geq 3$.*

f étant trois fois dérivable on va lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 3 avec $a = 0$ et b successivement égal à 1 et -1 :

$$\begin{aligned}\exists\, 0 < \alpha < 1 \ &: f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!}\\ \exists -1 < \beta < 0 \ &: f(-1) = f(0) - f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} - \frac{f^{(3)}(\beta)}{3!},\end{aligned}$$

on en déduit aussitot : $f^{(3)}(\beta) + f^{(3)}(\alpha) = 6$ qui implique $f^{(3)}(\beta) \geq 3$ ou $f^{(3)}(\alpha) \geq 3$. CQFD.

• *Soit* $f \in \mathscr{C}^2(]-2,2[)$, *si* $f(0) = 0$, *montrer que* $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $1 \leq p \leq n$ on applique Taylor-Lagrange à f sur $[0, p/n^2] \subset]-2,2[$:

$$\exists\, \zeta_p \in]0, p/n^2[: \ f(p/n^2) = f(0) + \frac{p}{n^2} f'(0) + \frac{p^2}{2n^4} f''(\zeta_p) = \frac{p}{n^2} f'(0) + \frac{p^2}{2n^4} f''(\zeta_p).$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^2}\right) &= f'(0) \sum_{p=1}^n \frac{p}{n^2} + \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{2n^4} f''(\zeta_p)\\ &= f'(0) \cdot \frac{n+1}{2n} + \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{2n^4} f''(\zeta_p) = \frac{f'(0)}{2} + \frac{f'(0)}{2n} + \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{2n^4} f''(\zeta_p)\end{aligned}$$

soit puisque f' est continue donc bornée sur $[-1,1]$ (disons par $C > 0$) et $\sum_0^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \right| &\leq \frac{|f'(0)|}{2n} + \frac{C}{2n^4} \cdot \sum_{p=1}^n p^2\\ &\leq \frac{|f'(0)|}{2n} + C \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

CQFD.

5. Développements Limités. (en cours de rédaction)

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}$, I un voisinage de 0 et $f \ : \ I \to \mathbb{R}$. On dira que f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** 0 (et on écrira $DL_n(0)$) si et seulement si, il existe un polynôme P à coefficients réels de degré $\leq n$ tel que

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) = P(x) + o(x^n), \ x \in I.$$

Le polynôme P est la partie régulière ou principale du développement limité.

Remarques : Souvenez vous que $o(x^n)$ est une notation pour représenter une fonction définie dans un voisinage de l'origine de la forme $x^n\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$; en d'autres termes c'est une quantité qui, divisée par x^n tends vers zéro avec x ; par exemple en $x = 0$, la fonction $x \mapsto x\sin(x)$ est un $o(x)$, c'est aussi un $o(x^{3/2})$ mais certainement pas un $o(x^2)$ car $x\sin(x)/x^2$ tends vers 1 et non pas vers 0 lorsque x tends vers 0.

Exemple : La fonction $f(x) = 3 + x - 5x^2 + \sin^3(x)$ admet un $DL_2(0)$ dont la partie régulière est $P(x) = 3 + x - x^2$ car $\frac{\sin^3(x)}{x^2} = x \cdot \frac{\sin^3(x)}{x^3} \to 0 \cdot 1 = 0$ donc s'écrit bien sous la forme $\sin^3(x) = x^2\varepsilon(x)$.)

Propriété : Si f admet un $DL_n(0)$, alors le polynôme P vérifiant $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ est unique, c'est la **partie régulière** du $DL_n(0)$.
Par conséquent, une telle fonction f admettra aussi un $DL_k(0)$ pour tout entier $0 \leq k \leq n$ dont la partie régulière sera le polynôme de degré $\leq k$ déduit de P en lui supprimant les termes de degré $> k$.

Exemple : La fonction vue plus haut $f(x) = 3 + x - 5x^2 + \sin^3(x)$ admet un $DL_2(0)$ dont la partie régulière est $P(x) = 3 + x - x^2$, elle admet donc un $DL_1(0)$ est $f(x) = 3 + x + x\varepsilon(x)$ et son $DL_0(0)$ est $f(x) = 3 + \varepsilon(x)$.

Démonstration : Supposons qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[x]$ tels que

$$f(x) = P_1(x) + x^n\varepsilon(x) = P_2(x) + x^n\varepsilon(x),\ x \in I,$$

alors $P_1(x) - P_2(x) = x^n\varepsilon(x)$ et si $P_1 \neq P_2$ notons a_kx^k $(a_k \neq 0,\ 0 \leq k \leq n)$ le terme de plus bas degré de $P_1 - P_2$, alors $P_1 - P_2 \underset{x\to 0}{\sim} a_kx^k$ ce qui est en contradiction avec $P_1(x) - P_2(x) = x^n\varepsilon(x)$. $\square$

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}$, I un voisinage de a et $f : I \to \mathbb{R}$. On dira que f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a (et on écrira $DL_n(a)$) si et seulement si, il existe un polynôme P à coefficients réels de degré $\leq n$ tel que

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n\varepsilon(x) = P(x-a) + o((x-a)^n),\ x \in I,$$

où $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarques : • Dans la majorité des cas lorsque le point a est distinct de l'origine, on se ramène à l'origine par le changement de variable $x = a + h$ où h est dans un voisinage de 0 et la formule ci-dessus s'écrit

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n\varepsilon(x) = f(a+h) = P(h) + h^n\varepsilon_1(h),$$

où $\varepsilon_1(h) = \varepsilon(x-a)$.

Propriétés : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de l'origine. Alors :

a) Pour que f admette un $DL_0(0)$ il faut et il suffit que f soit continue à l'origine et on a alors :

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x), \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

b) Pour que f admette un $DL_1(0)$ il faut et il suffit que f soit dérivable à l'origine et on a alors :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x), \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si f est n fois dérivable à l'origine alors f admet un $DL_n(0)$ et on a :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Par contre la réciproque peut-être fausse : i.e. pour tout $n \geq 2$ il existe des fonctions admettant un $DL_n(0)$ qui ne sont pas n fois dérivables en 0.

En particulier, toute fonction f indéfiniment dérivable au voisinage d'un point a admet un $DL_n(a)$ à tout ordre et on a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

où $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

d) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de l'origine et admettant un $DL_n(0)$: $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$. Si f est paire (resp. impaire) il est est de même de P i.e. il n'y a dans P que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration : a) f est continue à l'origine si et seulement si $\lim_{x\to 0} f(x) - f(0) = 0$ ce qui se traduit bien par $f(x) = f(0) + x\varepsilon(x)$.

b) Supposons que f soit dérivable en 0, alors $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) = 0$ soit $\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) = \varepsilon(x)$ et donc $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$. Réciproquement, si f admet un $DL_1(0)$ alors : $f(x) = a + bx + x\varepsilon(x)$, en particulier, f admet un $DL_0(0)$ et $f(x) = a + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) = bx + x\varepsilon(x)$. De (a), on déduit que $a = f(0)$. Alors, $f(x) = f(0) + bx + x\varepsilon(x)$ qui implique $\frac{f(x)-f(0)}{x} = b + \varepsilon(x) \longrightarrow b$ lorsque x tends vers 0 : f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = b$.

c)C'est la formule de Taylor-Young. Pour l'exemple d'une fonction admettant un $DL_2(0)$ qui n'est pas deux fois dérivable à l'origine, on peut considérer

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x^2), & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En effet, $|f(x)/x^2| \leq |x|$, donc $f(x) = x^2\varepsilon(x)$ i.e. f admet un $DL_2(0)$ dont la partie régulière est le polynôme nul, en particulier vu (b) : f est dérivable (car $DL_2(0)$ implique $DL_1(0)$) à l'origine et $f(0) = f'(0) = 0$. Mais pour $x \neq 0$: $f'(x) = 3x^2 \sin(x^{-2}) - 2\cos(x^{-2})$ qui n'admet pas de limite en 0 (vu le second terme) : f' n'est donc pas continue à l'origine et ne peut donc y être dérivable.

Voici l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est continue et dérivable qu'en 0, nulle part deux fois dérivable (et à fortiori à un ordre supérieur) et qui pourtant admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

pour cela, vérifiez (exercice) que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = x^n\varepsilon(x)$ (la partie régulière du $DL_n(0)$ est donc le polynôme nul). □

Remarques : Ces derniers exemples sont pathologiques, et dans la trés grande majorité des cas, les fonctions que nous manipulerons seront suffisament régulières pour déduire via Taylor-Young (c) leur développement limité.

Ceci permet d'obtenir les $DL_n(0)$ de plusieurs fonctions usuelles :

• $f(x)=e^x$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$: $f^{(n)}(x)=e^x$, et par suite $f^{(n)}(0)=1$ et donc le $DL_n(0)$ de la fonction exponentielle est

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x).$$

• Pour $f(x)=\sin(x)$ nous avons $f^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin(x)$, $f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n\cos(x)$, par conséquent $f^{(2n)}(0)=0$ et $f^{(2n)}(0)=(-1)^n$ et $DL_{2n+2}(0)$ de la fonction sinus est

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

• De même pour $f(x)=\cos(x)$ son $DL_{2n+1}(0)$ est

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

• Et les fonctions hyperboliques :

$$\mathrm{sh}(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x).$$
$$\mathrm{ch}(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

• Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, l'application $f(x)=(1+x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et une récurrence élémentaire nous donne pour tout $n_i n\mathbb{N}$ et $x>-1$: $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ d'où $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$ et par conséquent :

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x).$$

• Les cas particuliers $\alpha=-1$ et $\alpha=1$ seront essentiels dans la pratique :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+x^n\varepsilon(x).$$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x).$$

On peut d'ailleurs retrouver ce dernier en observant que

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1-x^{n+1}}{1+x}+\frac{x^{n+1}}{1+x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

puis en remarquant que $\dfrac{x^{n+1}}{1+x} = x^n \cdot \dfrac{x}{1+x} = x^n\varepsilon(x),\ (x \to 0)$.

A partir de ces premiers développements limités voici quelques règles de calculs qui vont nous permettre de compléter sans trop d'effort notre liste.

(primitivation d'un DL en 0). Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de l'origine ; si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f' admet un $DL_n(0)$ alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est la primitive de la partie régulière du $DL_n(0)$ de f' qui vaut $f(0)$ en 0.

- Par exemple comme $(\log(1+x))' = 1/1+x,\ -(\log(1-x))' = 1/1-x$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)\\ -\log(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).\end{aligned}$$

- En remplacant x par x^2 dans les DL de $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$, on tire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x).\\ \frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Remarquez bien qu'ici on observe une partie régulière de degré $2n$ on pense donc à un $DL_{2n}(0)$ et donc un reste de la forme $x^{2n}\varepsilon(x)$ mais ces fonctions sont paires donc pas de termes de gré impair dans les parties régulières donc la partie régulière du $DL_{2n}(0)$ est la partie régulière du $DL_{2n+1}(0)$: on peut donc remplacer $x^{2n}\varepsilon(x)$ par $x^{2n+1}\varepsilon(x)$. Maintenant, en intégrant ces DL, on en déduit ceux de arctan et argth :

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x).\\ \operatorname{argth}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x).\end{aligned}$$

(dérivation d'un DL en 0). Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de l'origine et $n+1$ fois dérivable. Alors la dérivée de la partie réguliere du $DL_{n+1}(0)$ de f est la partie régulière du $DL_n(0)$ de f.

Exemples : • Par exemple la dérivée de $f(x) = \sin(x)$ est $f'(x) = \cos(x)$, la partie régulière du $DL_3(0)$ de f est $(\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)...)$ $P(x) = x - x^3/6$ et $P'(x) = x - x^2/2$ on reconnait bien la partie régulière du $DL_2(0)$ de $f'(x) = \cos(x) = x - x^2/2 + o(x^2)$.
• Pour chercher le $DL_2(7)$ de $f(x) = \sin(x)$ deux méthodes se présentent : la première repose sur Taylor-Young, f étant régulière : $f(x) = f(7) + (x-7)f'(7) + \frac{(x-7)^2}{2}f''(7) + (x-7)^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 7}\varepsilon(x) = 0$. Comme $f(7) = \sin(7),\ f'(7) = \cos(7),\ f''(7) = -\sin(7)$ on tire $f(x) = \sin(7) + (x-7)\cos(7) - \frac{(x-7)^2}{2}\sin(7) + (x-7)^2\varepsilon(x)$: c'est le $DL_2(7)$ de la fonction sinus.

Pour la seconde on se ramène à l'origine avec le changement de variable $x = 7 + h$: $\sin(x) = \sin(7 + h) = \sin(7)\cos(h) + \sin(h)\cos(7)$, maintenant on connait les $DL_2(0)$ **à l'origine** des focntions sinus : $\sin(h) = h + h^2\varepsilon(h),\ \cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ et il n'y a plus qu'à remplacer $\sin(7+h) = \sin(7)(1-\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon(h))+(h+h^2\varepsilon(h))\cos(7) = \sin(7)+h\cos(7)-\frac{h^2}{2}\sin(7)+h^2\varepsilon(h)$, on réintroduit alors x avec $h = x - 7$ pour retouver le résultat précédent.

(Opérations sur les fonctions admettant un $DL_n(0)$).

• 1) Soient f, g admettant un $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P_f et P_g. Alors $f + \lambda g,\ (\lambda \in \mathbb{R})$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $P_f + \lambda P_g$.

• 2) Soient f, g admettant un $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P_f et P_g. Alors fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en ne conservant dans le polynôme $P_f Q_g$ que les termes de degré $\leq n$.

• 3) Soient f, g admettant un $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P_f et P_g. Si $g(0) \neq 0$ alors f/g admet un $DL_n(0)$.

• 4) Soient I, J deux voisinages de l'origine, $f\ I \to \mathbb{R}, g\ :\ J \to \mathbb{R}$ admettant un $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P_f et P_g. Si $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ est défine sur un voisinage de l'origine et admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en ne conservant dans le polynôme $P_f \circ Q_g$ que les termes de degré $\leq n$.

Ces propriétés doivent être parfaitement maitrisées pour pouvoir maitriser les développements limités. Voici sur quelques exemples détaillés comment il faut procéder.

Exemples : • *Cherchons le $DL_5(0)$ de $f(x) = \cos^2(x)$.*
Pour cela on va utiliser la propriété produit : $\cos^2(x) = \cos(x) \times \cos(x)$, pour calculer la partie régulière développement limité à l'ordre 5 de f il faut prendre les termes de degré ≤ 5 dans le produit des parties régulières $(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}) = 1 - x^2 + x^4(\frac{2}{24} + \frac{1}{4}) + x^4\varepsilon(x)$ (il n'y a pas de terme en degré 5 car le cosinus est pair et les termes de degré 5 ou plus sont dans $x^4\varepsilon(x)$ qui est bien en fait un $x^5\varepsilon(x)$ car il n'y a pas de termes en x^5...) ; par conséquent le DL cherché est $\cos^2(x) = 1 - x^2 + x^4(\frac{2}{24} + \frac{1}{4}) + x^5\varepsilon(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)$. Vous pouvez aussi (mais cela est moins sportif) vérifier ce calcul en calculant les dérivées succesives de f jusqu'à l'ordre 5 et écrire (pas de termes impairs car f est paire) $f(x) = f(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + x^5\varepsilon(x)$...

• *Cherchons le $DL_5(0)$ de $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.*
Pour cela il suffit de multiplier les $DL_5(0)$ de $\sin(x)$ et $1/\cos(x)$ nous avons déja $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$, il ne reste plus qu'à chercher celui de $1/\cos(x)$: la méthode est standanrt, c'est une fraction rationnelle, le dénominateur ne s'annule pas donc je me ramène à une forme canonique $1/1 \pm u$ où u est une fonction de x qui tends vers 0 avec x et la fraction étant paire, je ne cherche que les termes à l'ordre 4 (aprés ce sera 6) : $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)} = \frac{1}{1-u}$ avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)$ qui tends bien vers 0 avec x, donc $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u)$ (remarquez bien ici que je vais qu'à l'ordre 2 car les termes d'ordre supérieur ne contribueront qu'à un ordre ≥ 6 en x et on cherche un DL à l'ordre 5, par exemple le suivant est $u^3 = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x))^3 = x^6/8+$ des termes de degré supérieur... on remarque facilement cela si on observe qu'au voisinage de $x = 0$, u est équivalent à $x^2/2$ donc $u^2 \sim x^4/4$...) Ainsi : $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u) = 1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x))^2 + x^4\varepsilon(x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\varepsilon(x)$ et finalement $\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\varepsilon(x)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$.

• *Déterminer la limite* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)$.

Cette limite clairement indéterminée peut-être facilement calculée avec un développement limité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}&=\frac{(x-\sin(x))(x+\sin(x))}{x^2\sin^2(x)}=\frac{(\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x))(2x+x\varepsilon(x))}{x^2(x+x\varepsilon(x))^2}\\&=\frac{\frac{x^4}{3}+x^4\varepsilon(x)}{x^4+x^4\varepsilon(x)}=\frac{\frac{1}{3}+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

• *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de* $f(x)=arctan(e^x)$.

Il n'est pas possible de composer les DL en 0 (bien connus) de l'exponentielle et d'arctan pour trouver celui de f car $e^0=1$ et la fonction arctan est donc évaluée au voisinage de 1 et non de l'origine. Pour contourner cette difficulté on calcule la dérivée de f : $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}=e^x\times\frac{1}{1+e^{2x}}$ et on va chercher un $DL_2(0)$ de f' qui, aprés intégration, nous donnera un $DL_3(0)$ pour f. Pour la fraction $\frac{1}{1+e^{2x}}$ la méthode est **toujours** la même : on se ramène à une des deux formes canoniques $\frac{1}{1\pm u}$ **où** $u\to 0$:

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1+e^{2x}}&=\frac{e^x}{1+1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+x^2\varepsilon(x)}=\frac{e^x}{2+2x+2x^2+x^2\varepsilon(x)}=\frac{e^x}{2(1+x+x^2+x^2\varepsilon(x))}\\&\underset{u=x+x^2+x^2\varepsilon(x)}{=}\frac{e^x}{2(1+u)}=\frac{e^x}{2}\big(1-u+u^2+u^2\varepsilon(u)\big)=\frac{e^x}{2}\big(1-(x+x^2)+(x+x^2)^2+x^2\varepsilon(x)\big)\\&=\frac{\Big(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\Big)(1-x+x^2\varepsilon(x))}{2}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}{2}\end{aligned}$$

soit $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon(x)$ et aprés intégration du DL il vient

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+x^3\varepsilon(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+x^3\varepsilon(x).$$

Références

[1] Monier J.M. *"Cours de mathématiques, Analyse 2"*, (chapitre 9) Dunod (1994).

[2] Monier J.M. *"Exercices de mathèmatiques :, Analyse 1"*, (chapitre 8) Dunod (1990). (pour ces deux références un peu anciennes, il existe de trés nombreuses rééditions... allez voir à la bibli, consultez aussi le site d'exercices sur le ouèb dont l'adresse est signalée sur ma page).

Principaux développements limités à connaitre parfaitement.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$