UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - SYSTEMES LINEAIRES (COURS-EXERCICES). ☯ ☢ ☯

Un **système linéaire** est un système d'équations linéaires de la forme

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n &= b_p \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les inconnues. Il y a donc p équations et n inconnues. Résoudre un système linéaire c'est déterminer l'ensemble des vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui sont solutions des p équations de $(\mathscr{S})$

Exemples : • Un système peut ne pas avoir de solutions, par exemple $(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 5 \end{cases}$

• Un système peut avoir une infinité de solutions par exemple, le système $(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{cases}$ équivaut (la seconde équation est le double de la première) à $x + 2y = 3$; l'ensemble des solutions est donc $\{\,(3 - 2y, y),\ y \in \mathbb{R}\}$ c'est la droite dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + 2y = 3$, observez bien que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

• Un système peut avoir une seule solution, par exemple le système $(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} x + 2y &= 3 \\ x + 4y &= 5 \end{cases}$ admet comme unique solution le vecteur $(1, 1)$.

Ecriture matricielle d'un système : Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{pn}(\mathbb{R})$,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (les bases canoniques sont fixées) alors

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n &= b_p \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad AX = B.$$

Ainsi si l'on désigne par $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'application linéaire admettant pour matrice (les bases canoniques sont fixées) la matrice A, ie :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions du système est l'ensemble éventuellement vide :

$$f^{-1}(B) = \{\, X \in \mathbb{R}^n \ :\ f(X) = B\}.$$

Résolution d'un système linéaire : Il ne s'agit pas d'étudier de manière complète les méthodes de résolution d'un système linéaire, nous pourrions trés bien le faire mais le temps nous manque.

• **Le cas particulier où le second membre est nul** $B = 0_{\mathbb{R}^p}$ **:** Dans ce cas et avec les notations précédentes :

$$(\mathscr{S}) \iff AX = 0_{\mathbb{R}^p} \iff f(X) = 0_{\mathbb{R}^p} \iff X \in \ker(f).$$

L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est donc le noyau $\ker(f)$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (ce qui ne ne sera jamais le cas si $B \neq 0_{\mathbb{R}^p}$), une chose que nous savons déterminer (et qui ne sera jamais vide car $f((0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$... en particulier, il y aura des solutions non nulles lorsque f ne sera pas injective).

Exemple : Considérons le système $(\mathscr{S})$ $\begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{cases}$; l'ensemble de ses solutions est donc le noyau de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y, z) = (x+2y+z, 2x-y+z)$. Le rang de la matrice de f : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est deux (par exemple, le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$ est non nul et la matrice de taille 2×3 est de rang inférieur ou égal à 2, ou encore le rang est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ sous-espace de $\mathbb{R}^2$ donc de dimension ≤ 2) ; avec le théorème du rang nous sommes assurés que l'ensemble S des solutions sera un sous-espace vectoriel de dimension 1. Déterminer S est standart :

$$(x, y) \in S \iff \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 0 - 5y - z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y \\ z = 5y \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = (3y, y, 5y) = y(3, 1, 5) \quad \text{soit} \quad S = \ker(f) = \mathrm{vect}\{(3, 1, 5)\}.$$

• **Le cas où le second membre n'est pas nul** $B \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ **:** C'est le cas général et l'ensemble S des solutions est **soit vide, soit de la forme** :

$$S = \{X_0\} + \ker(f) = \{\, X_0 + X,\ X \in \ker(f)\},$$

où X_0 est une solution (**s'il en existe une !**) particulière de « l'équation sans second membre » : $(\mathscr{S}_0)$: $AX = 0_{\mathbb{R}^p}$ (il est trés instructif à ce niveau de faire le parallèle avec la résolution des équation différentielles du second ordre à coefficients constants que vous avez vu au premier semestre...).

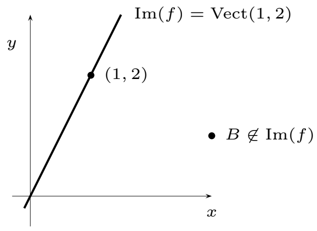
Démonstration : Si l'ensemble des solutions n'est pas vide, soit X_0 une solution particulière ; procède par double inclusion :

◇ Soit $Y = X_0 + X \in \{X_0\} + \ker(f)$ alors $AY = A(X_0 + X) = Ax_0 + AX = B + 0_{\mathbb{R}^p} = B$ et Y est bien solution du système donc $\{X_0\} + \ker(f) \subset S$.

◇ Réciproquement soit $Y \in S$ une solution, alors $A(Y - X_0) = AY - AX_0 = B - B = 0_{\mathbb{R}^p}$ autrement dit $Y - X_0 \in \ker(f)$ ie $Y \in \{X_0\} + \ker(f)$; Y étant arbitraire, nous avons bien $S \subset \{X_0\} + \ker(f)$. CQFD.

En résumé, si on connait une solution particulière d'un système linéaire $(\mathscr{S})$: $AX = B$, il suffit de déterminer les solutions de l'équation sans second membre $(\mathscr{S}_0)$: $AX = 0_{\mathbb{R}^p}$ et alors $S = \{X_0\} + \ker(f)$. Le problème est donc de savoir si le système $(\mathscr{S})$ admet des solution et, si tel est le cas d'en déterminer une. Pour cela, on peut déja étudier le rang de la matrice A du système : en effet, via le théorème du rang si f est surjective il y aura toujours au moins une solution, une seule si f est de plus injective et une infinité sinon ; si f n'est pas injective, tout dépend de la position de B par rapport à $\mathrm{Im}(f)$: s'il est dans $\mathrm{Im}(f)$ il y aura des solutions et on se ramène au cas précédent, sinon ($B \notin \mathrm{Im}(f)$) il n'y en aura pas.

Exemple : Par exemple, le premier système que nous avons vu $(\mathscr{S})$ $\begin{cases} x+2y &= 3 \\ 2x+4y &= 1 \end{cases}$ était sans solutions et on peut facilement vérifier que $B=(3,5)\notin \text{Im}(f)$. En effet $f(x,y)=(x+2y,2x+4y)$ l'image de f est le sous-espace de dimension 1 : $\text{Vect}(1,2)$



• Le cas particulier où la matrice A du système est carrée (ie $n=p$) : Dans ce cas f est un endomorphisme et deux cas se présentent :

◇ $\det(A)\neq 0$: A est donc inversible (f est un isomorphisme) et le système $(\mathscr{S})$: $AX=B$ admet l'unique solution $X=A^{-1}B$.

◇ $\det(A)=0$. f n'est alors plus surjective, si $B\notin \text{Im}(f)$ alors $S=\emptyset$, et si $B\in\text{Im}(f)$ le système $(\mathscr{S})$ admettra une infinité de solutions que l'on pourra écrire sous la forme $S=X_0+\ker(f)$ où X_0 est une solution particulière du système.

Exemples : • Résoudre le système $\begin{cases} 2x-3y+z &= 1 \\ x+4y-2z &= 0 \\ 8x-y-z &= 3 \end{cases}$: ici la matrice du système est $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc d'un endomorphisme, son rang est visiblement 2 et par le théorème du rang $3=2+\dim\ker(f) \implies \dim\ker(f)=1$: f n'est pas injective, il y aura zéro ou une infinité de solutions suivant que le vecteur $B=(1,0,3)$ soit ou non dans l'image de f.

$$\begin{cases} 2x-3y+z &= 1 \\ x+4y-2z &= 0 \\ 8x-y-z &= 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x+4y-2z &= 0 \\ 2x-3y+z &= 1 \quad (L_2\leftrightarrow L_1) \\ 8x-y-z &= 3 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x+4y-2z &= 0 \\ -11y+5z &= 1 \quad (L_2\leftarrow L_2-2L_1) \\ -33y+15z &= 3 \quad (L_3\leftarrow L_3-8L_1) \end{cases} \implies \begin{cases} x+4y-2z &= 0 \\ -11y+5z &= 1 \quad \text{(les lignes 2 et 3 sont colinéaires)} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x+4y-2z &= 0 \\ y=\dfrac{5z-1}{11} \end{cases} = \begin{cases} x &= -4y+2z=-4\dfrac{5z-1}{11}+2z \\ y &= \dfrac{5z-1}{11} \end{cases} \implies \begin{cases} x &= \dfrac{2z+4}{11} \\ y &= \dfrac{5z-1}{11} \end{cases}$$

Ainsi $(x,y,z)\in S \iff (x,y,z)=(\dfrac{2z+4}{11},\dfrac{5z-1}{11},z)=(4/11,-1/11,0)+z(2/11,5/11,1)$ et on retrouve bien la forme prévue : une solution particulière $(4/11,-1/11,0)$ et le noyau de f : $\text{Vect}(2/11,5/11,1)$.

• Résoudre le système $\begin{cases} x-y-z &= 1 \\ 2x+2y-3z &= 0 \\ x+2y-z &= 0 \\ 4x+3y-5z &= 1 \end{cases}$: ici la matrice du système est $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, c'est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$: elle ne peut donc être surjective ; son rang est visiblement 3 et par le théorème du rang $3=3+\dim\ker(f) \implies \dim\ker(f)=0$: f est injective, il y aura une ou zéro solution suivant que le vecteur

$B=(1,0,0,1)$ soit ou non dans l'image de f.

$$\begin{cases} x-y-z & =1 \\ 2x+2y-3z & =0 \\ x+2y-z & =0 \\ 4x+3y-5z=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y-z & =1 \\ 4y-z & =-2 \quad (L_2 \leftarrow L_2-2L_1) \\ 3y & =-1 \quad (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \\ 7y-z & =-3 \quad (L_4 \leftarrow L_4-4L_1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & =1+y+z \\ z & =4y+2=-4/3+2=2/3 \\ y & =-1/3 \\ z & =7y+3=-7/3+3=2/3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & =4/3 \\ y & =-1/3 \\ z & =2/3 \end{cases}$$

le système admet donc l'unique solution $(4/3,-1/3,2/3)$.

• Résoudre le système $\begin{cases} x-y+z+t & =2 \\ x+y-z+2t & =1 \\ y+2z & =0 \end{cases}$: ici la matrice du système est $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, c'est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ et son rang est visiblement 3 : f est donc surjective (il y aura au moins une solution) et par le théorème du rang $4=3+\dim\ker(f) \Longrightarrow \dim\ker(f)=1$ il y aura une infinité de solutions : $S=\{X_0\}+\ker(f)$.

$$\begin{cases} x-y+z+t & =2 \\ x+y-z+2t & =1 \\ y+2z & =0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y+z+t & =2 \\ 2y-2z+t & =-1 \quad (L_2 \leftarrow L_2-L_1) \\ y+2z & =0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-y+z+t & =2 \\ 2y-2z+t & =-1 \\ 6z-t & =1 \quad (L_3 \leftarrow 2L_3-L_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & =y-z-t+2 \\ y & =(2z-t-1)/2=-(t+1)/3 \\ z & =(t+1)/6 \quad (L_3 \leftarrow 2L_3-L_2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & =3(-t+1)/2 \\ y & =-(t+1)/3 \\ z & =(t+1)/6 \end{cases}$$

et l'ensemble des solutions est donc $\{(3/2,-1/3,1/6,0)\}+\mathrm{Vect}(-3/2,-1/3,1/6,1)$.

◕ 24 février 2009 ◕ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr
Page L1-PCP : http ://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/L1PCP.html