UNIVERSITE PAUL SABATIER **2008/2009**

☯ ☢ ☯ L1 - PCP - DETERMINANTS (COURS-EXERCICES). ☯ ☢ ☯

1. Déterminant, définition, propriètés.

Le **déterminant** d'une matrice carrée à deux lignes et colonnes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est par définition le nombre réel (ou complexe)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pour une matrice 3×3 ce sera :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Pour une matrice carrée $n \times n$, la procèdure est identique : son déterminant va s'exprimer comme une combinaison linéaire de n déterminants d'ordre $n-1$ suivant la même recette que pour un déterminant d'ordre 3 :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + \dots + (-1)^{1+i} a_{1i} \det(A_{1i}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n}).$$

où A_{1i} est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ déduite de A lorsque l'on supprime la première ligne et la i-ième colonne (autrement dit la ligne et la colonne où se trouve a_{1i}).

Exercice : Vérifiez que cette définition coïncide bien avec celle donnée pour une matrice 3×3.

Exemples :

- Ex.1-F3 : $\det(D) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \dots$
- $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ ? & b & 0 \\ ? & ? & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 0 \\ ? & c \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} ? & 0 \\ ? & c \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} ? & b \\ ? & ? \end{vmatrix} = abc.$
- $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ ? & b & 0 & 0 \\ ? & ? & c & 0 \\ ? & ? & ? & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ ? & c & 0 \\ ? & ? & d \end{vmatrix} = abcd.$

• Et plus généralement comme $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ ? & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ ? & \dots & ? & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & \dots & 0 \\ ? & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ ? & \dots & ? & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots = a_n$ par une récurrence élémentaire. Ainsi, le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ie des zéros au dessus de la diagonale) est égal au produit des éléments diagonaux.

• Un cas particulier important est celui de la matrice identité : $\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Propriétés du déterminant : Vu ce qui précède, pour calculer un déterminant d'ordre 4, il faut calculer 4 déterminants d'ordre 3, soit 12 déterminants d'ordre 2 et de plus respecter des régles de signe : donc d'énormes chances de faire une erreur de calcul. Comme nous allons le voir maintenant, l'application déterminant jouit d'un certain nombre de propriétés remarquables qui vont permettre de contourner ces problèmes. Dans tout ce qui suit, si $A \in M_n(\mathbb{C})$ lorsque l'on écrira $\det(A) = \det(C_1|C_2|\dots|C_n)$ il faut comprendre que C_i est la i-ième colonne de la matrice A.

• ***1.*** *L'application déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne de la matrice. Autrement dit :*

$$\det(C_1|C_2|\dots,|C_i + \lambda C_i'|\dots|C_n) = \det(C_1|C_2|\dots,|C_i|\dots|C_n) + \lambda \det(C_1|C_2|\dots,|C_i'|\dots|C_n).$$

Par exemple $\begin{vmatrix} 0+25 & 1 & 0 \\ 2+50 & 3 & 0 \\ 0+75 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 25 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

• ***2.*** *Si la matrice possède deux colonnes proportionelles son déterminant est nul.*

Par exemple $\begin{vmatrix} 25 & 1 & 75 \\ 23 & 3 & 69 \\ 12 & 2 & 36 \end{vmatrix} = 0$ car $C_3 = 3C_1$, vérifiez le par le calcul.

• ***3.*** *Le déterminant d'une matrice reste inchangé si l'on ajoute à une colonne de la matrice une combinaison linéaire des* ***autres*** *colonnes. En particulier, si les colonnes forment une famille libre dans $\mathbb{C}^n$ le déterminant sera non nul.*

Idée de la preuve sur un cas particulier : on a pour une matrice 3×3 : $\det(C_1+2C_2-7C_3|C_2|C_3) = \det(C_1|C_2|C_3) + 2\det(C_2|C_2|C_3) - 7\det(C_3|C_2|C_3)$ d'aprés la propriété 1 puis $\det(C_1+2C_2-7C_3|C_2|C_3) = \det(C_1|C_2|C_3) + 2\det(C_2|C_2|C_3) - 7\det(C_3|C_2|C_3) = \det(C_1|C_2|C_3)+0+0$ d'aprés la propriété 2 puisque dans les deux derniers déterminants deux colonnes sont égales donc proportionelles.

Exemple : Les nombres 204, 527 et 255 sont divisibles par 17, démontrer sans le calculer que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est aussi divisible par 17.
En effet, si l'on ajoute à la troisième colonne cent fois la première plus 10 fois la seconde (ie $C_3 \leftarrow C_3 + 10C_2 + 100C_1$) les déterminant reste inchangé donc

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204/17 \\ 5 & 2 & 527/17 \\ 2 & 5 & 255/17 \end{vmatrix}$$

et le dernier déterminant est bien entier vu sa définition puisque ses coefficients sont entiers...

• ***4.*** *Si l'on échange deux colonnes dans un déterminant, il change de signe.*

Idée de la preuve sur un cas particulier : Avec la propriété 2 nous avons $\det(C_1 - C_2, C_1 - C_2, C_3) = 0$, donc par linéarité par rapport aux deux premières colonnes : $0 = \det(C_1 - C_2, C_1 - C_2, C_3) = \det(C_1, C_1 - C_2, C_3) - \det(C_2, C_1 -$

$C_2, C_3) = \det(C_1, C_1, C_3) - \det(C_1, C_2, C_3) - \det(C_2, C_1, C_3) + \det(C_2, C_2, C_3) = -\det(C_1, C_2, C_3) - \det(C_2, C_1, C_3)$ soit $\det(C_1, C_2, C_3) = -\det(C_2, C_1, C_3)$.

– **Par exemple** vérifiez que $\begin{vmatrix} 25 & 1 & 3 \\ 23 & 3 & 2 \\ 12 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 25 & 3 \\ 75 & 3 & 2 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix}$.

• ***5.*** *On appelle transposée de la matrice* $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{C})$ *la matrice* ${}^tA = ((a_{ji})) \in M_n(\mathbb{C})$ *(on a donc échangé la i-ième ligne par la i-ième colonne). Alors* $\det(A) = \det({}^tA)$.

– **Par exemple** vérifiez que $\begin{vmatrix} 25 & 1 & 3 \\ 23 & 3 & 2 \\ 12 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 23 & 12 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Par conséquent, toutes les propriétés précédentes restent vraies si on remplace « ligne » par « colonne » et réciproquement. Par exemple, l'application déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne, le déterminant reste inchangé si l'on ajoute à une ligne de la matrice une combinaison linéaire des **autres** lignes ect. ect...

• ***6.*** *En particulier dans la défintion du déterminant on peut remplacer le rôle particulier joué par la première ligne par une quelconque ligne ou colonne, on dit alors que l'on calcule le déterminant en le développant par rapport à telle ligne ou telle colonne. Par exemple en développant par rapport à la i-ième ligne :*

$$\det(A) = \det\left(((a_{ij})_{ij})\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}).$$

où A_{ik} *est la matrice* $(n-1) \times (n-1)$ *déduite de* A *en supprimant la i-ième ligne et la k-ième colonne.*

– **Par exemple :**

• (F3, ex.4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Nous avons remplacé la ligne L_3 par $L_3 + L_2$ (le det reste inchangé si l'on ajoute à un ligne une combinaison linéaire des autres lignes...) puis on a mis $a+b+c$ en facteur dans la ligne 3 (le det est lineaire par rapport à la ligne 3) alors les lignes 1 et 3 étant les mêmes le det est nul.

• Pour calculer le quatrième déterminant de l'exercice 1 (F3), nous avons remarqué plus haut qu'en le développant par rapport à la première ligne cela donnait un calcul fastidieux (trois déterminants d'ordre 3...) ; mais avec les propriétés que nous possédons maintenant si on observe les trois zéros sur la seconde ligne en développant par rapport à celle -ci il vient $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 6$ on a dans la matrice 3×3 remplacé la colonne C_1 par $C_1 - C_3$ puis calculé le det par rapport à la dernière ligne.

• ***7.*** *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ *on a* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

☢ **Attention !** malgré la linéarité par rapport aux lignes et colonnes en général $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ pour vous en convaincre, considérez les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A),\ \lambda \in \mathbb{C}$.

• ***8.*** *(corollaire de 7.) a) Soit* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *alors* A *est inversible (*$A \in GL_n(\mathbb{C})$*) si et seulement si* $\det(A) \neq 0$ *et dans ce cas* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
b) Soient $A \in M_n(\mathbb{C}), P \in GL_n(\mathbb{C})$ *alors* $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

Preuve : a) Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, nous savons qu'il existe A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$ soit $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ puis $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1} = \det(A)^{-1}$. Réciproquement supposons que $\det(A) \neq 0$; comme $A \in M_n(\mathbb{C})$, A est la matrice d'un endomorphisme dont l'image est engendrée par les colonnes de A et ces colonnes ne peuvent être liées sinon le déterminant serait nul : A est donc la matrice d'un endormorphisme surjectif donc bijectif donc A est inversible... b) C'est immédiat vu 7 et 8-a.

• *9.* ***déterminant d'un endomorphisme*** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, $\mathscr{B}$ une base de E et $A_{\mathscr{B}}$ la matrice de f dans la base B. Alors* $\det(A_{\mathscr{B}})$ *ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$, on la note aussi* $\det(f)$.

Preuve : Via la propriété 8-b, c'est une conséquence immédiate de la formule du changement de base vu dans le chapitre précédent

2. Rang d'une matrice et d'une application linéaire.

Définitions : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ (ou $\mathbb{C}$)...) on appelle **rang** de f (et on note $(\mathrm{rg}(f))$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. On sait que c'est la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^q$ engendré par les colonnes de la matrice f (ayant fixé des bases dans l'espace de départ et d'arrivée).

Soit $A \in M_{qp}(\mathbb{R})$ une matrice à q lignes et p colonnes. On appelle **mineur** d'ordre k tout déterminant d'une matrice carrée $k \times k$ extraite de A en supprimant $q-k$ lignes et $p-k$ colonnes. k est donc infèrieur ou égal à $\inf\{q,p\}$. On appellera rang de A l'ordre du plus grand mineur extrait de A.

Quelques propriétés : Il n'est pas trop difficile de montrer que

– Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice (ayant fixé des bases dans l'espace de départ et d'arrivée).
– Vu les propriétés du déterminant le rang d'une matrice reste inchangé si l'on ajoute à une ligne (ou colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).
– Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{C})$ est inversible si et seulement si elle est de rang maximal n.
– Pour $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $\det(f) = 0$ équivaut à dire que $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul i.e. f non injectif...

– **Exemples :**

• (F3, ex.1) Cherchons le rang de $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est une matrice 3×2 son rang maximal est deux et elle admet trois mineurs d'ordre 2 : $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$; un des trois mineurs n'est pas nul : la matrice est de rang 2.

• (F3, ex.4) Cherchons le rang la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$. Cette matrice est carrée de taille 3, elle admet donc comme matrice extraite : une de taille 3, 9 de taille 2 et 9 de taille 1. Nous avons deja vu que $\det(A) = 0$ l'unique mineur d'ordre 3 est nul donc le rang de A est inférieur ou égal a deux. le rang de A est aussi supérieur ou égal a 1 car sur la première ligne on observe des coefficients non nuls qui donnet lieu à des mineurs d'ordre 1 non nuls. A est donc de rang 1 ou 2, elle sera de rang 2 si on extrait de A un mineur d'ordre 2 non nul. Vu le calcul fait plus haut le rang de A est le même que celui de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; ses seuls (au signe prés) mineurs d'ordre 2 éventuellement non nuls sont $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} = c - a$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = c - b$: il en résulte immédiatement que A est de rang 1 si $a = b = c$ et de rang 2 sinon.

- (F3, ex.5) Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, étudier son rang en fonction des paramètres a, b, c. Pour le déterminant :

$$\begin{aligned}\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}, \text{ opérations : } C_2 \leftarrow C_2 - C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1, \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix}, \text{ opérations : } C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ &= (b-a)(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

La matrice A sera donc de rang maximum 3 lorsque les réels a, b, c sont deux à deux distincts. Si les trois sont égaux i.e. $a = b = c$ dans ce cas A sera de rang 1 car les trois colonnes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ sont identiques et engendrent donc un espace de dimension 1 : A est de rang 1. Le dernier cas qu'il reste à étudier est celui où deux des paramètres parmi les trois sont égaux, par exemple $a = b \neq c$, dans cas $\text{rg}(A) = 2$ considérez par exemple le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = c - b \neq 0$.

☢ L'exemple précédent est instructif à plus d'un titre : faire des opérations sur les lignes et colonnes pour calculer un déterminant évite des calculs lourds et rapidement inaccessibles mais aussi lorsqu'il y a des paramètres, permet d'obtenir un résultat sous forme factorisé ce qui est souvent essentiel dans des questions comme la précédente (faites le calcul direct avec la formule de la première page et essayez de retrouver la factorisation... !).

- Encore un petit calcul de déterminant :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & x+n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x+1 & -x & -x & \dots & -x \\ 2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}, \ C_j \leftarrow C_j - C_1,\ 2 \leq j \leq n \\ &= \begin{vmatrix} x+1+2+\dots+n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}, \ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \dots + L_n, \\ &= x^{n-1}\left(x + \frac{n(n-1)}{2}\right).\end{aligned}$$

- **Exercice :** Montrer que $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+ca)$

- **Exercice :** Montrer que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$

- **Exercice :** Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+ca)$

☯ 12 février 2009 ☯ Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Mèl : lassere@math.ups-tlse.fr
Page L1-PCP : http ://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/L1PCP.html