L1 - PCP - CONTINUITE (COURS-EXERCICES).

1. Limites : définitions,propriétés.

Limite : Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on note $I =]a, b[$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction ; soit $c \in I$, on dira que f admet pour **limite** $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tends vers c et on écrira $\lim_{x\to c} f(x) = l$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ 0 < |x - c| < \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Si $b < +\infty$ et $I = (a, b[$ (ou $]a, b]$) on dira que f admet pour limite l lorsque x tends vers b si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ b - \eta(\varepsilon) < x < b \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

De même, si $-\infty < a$ et $I =]a, b[$ (ou $[a, b)$) on dira que f admet pour limite l lorsque x tends vers a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ a < x < a + \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Si $b = +\infty$ on dira que f admet pour limite l lorsque x tends vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ x > \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - l| < \varepsilon,$$

et si $a = -\infty$ on dira que f admet pour limite l lorsque x tends vers $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ x < \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Enfin on dira que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tends vers a si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists \eta(A) > 0 \ : \ a < x < a + \eta(A) \implies f(x) > A.$$

Exercices-exemples : • Etudier l'existence de limite à l'origine des fonctions suivante : $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$,

$g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \leq 0, \\ |x| + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ et $h(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$.

• Soient $f(x) = x^2, g(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$, montrer soigneusement que pour tout $c \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to c} f(x) = c^2$ et $\lim_{x\to c} g(x) = \sin(c)$.

• Montrer que $\lim_{x\to\pi/2\_} \tan(x) = +\infty$.

• Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$.

Propriété fondamentale : Sous les hypothèses de la définition précédente $\lim_{x\to c} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset]a, b[\setminus\{c\}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ implique $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Démonstration : Exercice. □

Remarque : Cette propriété est fondamentale : elle traduit la notion de limite dans le language des suites qui est bien plus facile à manipuler. En particulier, pour montrer qu'une fonction ne tends pas vers une limite l en un point c, il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ qui converge vers c mais telle que la suite $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers l ; pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point c il suffit de trouver ou bien deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergentes vers c et telles que les suite $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ convergent vers deux limites différentes, ou bien trouver une suite $(x_n)_n$ qui converge vers c mais telle que la suite $(f(x_n))_n$ diverge.

Propriétés : Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $I =]a, b[$ et soit $f, g \ : \ I \to \mathbb{R}$ admettant en un point $c \in I$ une limite : $\lim_{x\to c} f(x) = l_1, \lim_{x\to c} g(x) = l_2$. Alors :

1) f est bornée sur un voisinage de c.
2) $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$.
3) $\lim_{x\to c} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot l_1, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4) $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$.
5) Si $l_2 \neq 0 \ : \ \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.
6) $\lim_{x\to c} |f(x)| = |l_1|$.
7) $(f \geq 0$ et $\lim_{x\to c} f(x) = l_1) \implies l_1 \geq 0$.
8) $(f \geq g, \ \lim_{x\to c} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to c} g(x) = l_2) \implies l_1 \geq l_2$.
9) (th. des gendarmes) $(f \geq g \geq h$, et $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l) \implies \lim_{x\to c} g(x) = l$.
10) Si f est bornée et si $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$ alors $\lim_{x\to c} |f(x) \cdot g(x)| = 0$.

Démonstration : Toutes ces démonstrations sont élémentaires par la caractérisation de la limite par les suites. Il est bon d'essayer de faire la (1) et la (10) avec les « ε »... $\square$

2. Continuité.

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \ : \ I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, on dira que f est **continue** au point x_0 si et seulement si f admet une limite l en x_0 et $l = f(x_0)$. autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0 \ : \ |x - x_0| < \eta(\varepsilon, x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dira que f est continue sur I si elle est continue en chaque point de I.

Propriété : *A*vec le premier paragraphe, une fonction f sera continue au point c si, et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers c la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(c)$.
Si f est définie sur $I \setminus \{c\}$ mais admet une limite l au point c, alors si on pose $f(c) = l$, la fonction f ainsi prolongée est continue au point c.

Exemples-exercices : • La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$ que nous avons vu au paragraphe précédent admet la limite $0 \neq f(0) = 1$ en 0 : elle n'est donc pas continue à l'origine.
• Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \geq 0, \\ 1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$ n'est pas continue en $x = 0$ de deux manières différentes : par la définition et avec les suites.

Propriétés : Soient $f, g \ : \ I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, si f et g sont continues au point x_0 alors :
1) $f + g$ est continue au point x_0.
2) λf est continue au poit x_0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) $f \cdot g$ est continue au point x_0
4) Si $g(x_0) \neq 0$ alors f/g est continue au point x_0.
5) $|f|$ est continue au point x_0.
6) Soit J un intervalle contenant $f(I)$ et $h \ : \ J \to \mathbb{R}$ une application continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue au point x_0.

Démonstration : exercice. $\square$

3. Les théorèmes fondamentaux :

Théorème : Soit $f \ : \ I \to \mathbb{R}$ une application continue. Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration : Supposons par exemple que $a \leq b$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. On construit alors deux suites $(a_n)_n$ et $(a_n)_n$ par récurrence de la manière suivante :
0n commence par poser $a_0 = a$ et $b_0 = b$, on a donc $f(a_0) \leq 0 \leq f(b_0)$. Supposons maintenant a_n et b_n construits tels que $a_n \leq b_n$ et $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$; posons $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ alors :
– si $f(c_n) \leq 0$ on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

– si $f(c_n) > 0$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
Dans les deux cas on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_{n+1}) \leq f(b_{n+1})$. La suite $(a_n)_n$ est donc croissante, $(b_n)_n$ est décroissante et $a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. En outre, par construction nous avons

$$b_n - a_n = \frac{b_a}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

soit $\lim_n (a_n - b_n) = 0$: les suite sont donc adjacentes, elle convergent vers la même limite $c \in [a, b]$ et comme par construction $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n), \ \forall n \in \mathbb{N}$ en passant à la limite, la continuité de f au point c nous donne $f(c) = 0$. CQFD. $\square$

Remarques : • On peut énoncer ce résultat en disant que sur un intervalle, un fonction continue qui ne s'annule pas doit garder un signe constant.
• La méthode précédente donne un algorithme simple pour trouver la valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$: c'est la méthode de résolution par dichotomie, on s'arrête lorsque $(b-a)/2^n$ est inférieur ou égal à la précision demandée (pourquoi ?).
• Ce théorème est trivialement en général faux si f n'est pas continue, par exemple considérer $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ -1, & \text{si } x = 0, \end{cases}$,
il est aussi faux si I n'est pas un intervalle, par exemple l'application continue définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$
prends les valeurs 1 et -1 mais ne s'annule jamais.

Théorème des valeurs intermédiaires : Toute application f continue sur un intervalle $[a, b]$ f prends toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Démonstration : Si d est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, appliquer les théorème précédent à la fonction $x \mapsto f(x) - d$. $\square$

Corollaire : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration : Exercice ($f(I)$ sera un intervalle ssi $y_1, y_2 \in f(I) \implies [y_1, y_2] \subset f(I)$... pour cela appliquer convenablement le théorème des valeurs intermédiaires). $\square$

Remarques : • L'intervalle peut être réduit à un point si f est constante : $I = \mathbb{R}, \ f \equiv 12$, alors $f(I) = \{12\}$.
• Si f n'est pas continue, tout ceci n'a plus de sens : par exemple l'image $f(\mathbb{R})$ pour la fonction $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \in \mathbb{R}^\star, \\ -12, & \text{si } x = 0, \end{cases}$
est $\{-12\} \cup \mathbb{R}_+^\star$ qui n'est pas un intervalle.
• Si I n'est pas un intervalle, le résultat ne subsiste pas non plus : considérez par exemple la fonction continue sur $\mathbb{R}^\star$ et définie par $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 0, \\ -2, & \text{si } x < 0, \end{cases}$, alors $f(\mathbb{R}^\star) = \{-2, 2\}$ qui n'est pas un intervalle.

Théorème : Toute fonction f continue sur un intervalle **fermé borné** $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration : Peut-être... $\square$

Remarques : • Tout comme le théorème des valeurs intermédiaires ce dernier résultat est dans la pratique fondamental et il est essentiel de bien savoir l'utiliser.
• Le fait que l'intervalle doit être fermé borné est essentiel : par exemple la fonction continue définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = x$ est bornée mais n'atteint pas sa borne supérieure qui est 1 ; de même la fonction continue sur $[0, 1[$ et définie par $g(x) = 1/(x-1)$ n'est cette fois pas majorée ; enfin la fonction définie sur l'intervalle fermé non borné $[0, +\infty[$ définie par $f(x) = e^{-x}$ est bornée minorée par 0 mais n'atteint pas sa borne inférieure.

4. Continuité uniforme.

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \ : \ I \to \mathbb{R}$, on dira que f est **uniformément continue** sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ |x - x_0| < \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \ \forall x_0 \in I.$$

Remarques : Voici ci-dessous les définitions de la continuité sur I et celle de la continuité uniforme :

$$\forall\, x_0 \in I,\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0\ :\ |x - x_0| < \eta(\varepsilon, x_0) \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0\ :\ |x - x_0| < \eta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\ \forall\, x_0 \in I.$$

La différence est que dans la définition de la continuité uniforme le η marche pour **tous** les x_0, il est **uniforme** en x_0.

Théorème : Toute fonction f continue sur un intervalle **fermé borné** $[a, b]$ est uniformément continue.

Démonstration : Admise. □