AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES
☯ ☢ ALGÈBRE LINÉAIRE 1 – 14 JUIN 2008. ☢ ☯

1. Sélection pour la séance du 14 juin

Exercice 1. *Soient E_1, E_2 deux sous-espaces de $\mathbb{R}^{10}$ vérifiant*

$$E_1 \subset E_2, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_1 = 3, \quad \dim_{\mathbb{R}} E_2 = 6.$$

Déterminer la dimension du sous espace $\mathscr{E}$ de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{10})$ définit par

$$\mathscr{E} = \left\{T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{10}) \ : \ T(E_1) \subset E_1 \ \& \ T(E_2) \subset E_2\right\}.$$

Exercice 2. *Soient $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que $aA + bB + cC$ possède une valeur propre double.*

Exercice 3. *(tout hyperplan rencontre $GL_n(\mathbb{C})$). Soit $n \geq 2$.*

1) ***(preuve 1)*** *– Montrer que si un hyperplan $\mathscr{H}$ de $M_n(\mathbb{C})$ contient toutes les matrices nilpotentes, alors il contient une matrice inversible.*

– Montrer que dans $M_n(\mathbb{C})$, tout hyperplan rencontre $GL_n(\mathbb{C})$.

2) ***(preuve 2)*** *– Montrer que l'application qui à $A \in M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) associe $f_A \ : \ M_n(\mathbb{K}) \ni M \mapsto f_A(M) = Tr(AM)$ établit un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual.*

– Soit $f \in M_n(\mathbb{K})'$ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$f(XY) = f(YX), \qquad \forall\, X, Y \in M_n(\mathbb{K}).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \lambda\, Tr(X)$.

– Montrer que pour tout $n \geq 2$, tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4. *Montrer que deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 5. *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 = A^2$ et $\{-1, +1\} \subset sp\,(A)$. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.*

Exercice 6. *Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ & $Tr\,(A) = 8$. Calculer le polynôme caractéristique de A.*

Exercice 7. *(Matrices dans $M_n(\mathbb{Z})$).*

1) Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$, S'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^n = I_2$ montrer que $A^{12} = I_2$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$, montrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

3) À quelle condition un vecteur de $\mathbb{Z}^n$ est-il la première colonne d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{Z})$?

Exercice 8. *Soit $P \in \mathbb{C}[x]$, un polynôme non constant. L'objectif est de déterminer les points isolés de $\mathscr{E} := \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ P(A) = 0\,\}$*

1) Soit $A \in \mathscr{E}$, montrer qu'il existe une voisinage V de l'origine dans $M_n(\mathbb{C})$ tel que $(I_n + H)A(I_n + H)^{-1} = A$ pour tout $H \in V$.

2) Si de plus A est isolée, montrer que $AM = MA$ pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, en déduire que $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

3) Soit λ une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 2 ; à l'aide des matrices $M_k = \lambda I_n + k^{-1} E_{12}$, montrer que $\lambda I_n \notin \mathrm{Iso}(\mathscr{E})$. Enfin, montrer que $\mathrm{Iso}(\mathscr{E})$ est l'ensemble des matrices scalaires λI_n où λ est racine de P de multiplicité 1.

Exercice 9. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, déterminer le spectre de la transposée de la comatrice de A (distinguer les cas $\mathrm{rang(A)} = n, n-1, < n-1 \dots$).*

Exercice 10. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré d. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C} : |P(z)| \geq |\Im m(z)|^d$. Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n et une suite $(L_n)_n \subset \mathcal{L}(E)$ d'endomorphismes trigonalisables qui converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers L, montrer que L est trigonalisable. Que dire si on remplace trigonalisable par diagonalisable ?*

Exercice 11. *Soit $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$; montrer que l'intérieur de $\mathscr{D}_n$ est l'ensemble $\mathscr{D}'_n$ des matrices admettant n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que $\mathscr{D}_n$ et $\mathscr{D}'_n$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$. en utilisant l'exercice précédent, qu'elle est l'adhérence de $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$?*

Exercice 12. *Déduire le théorème de Cayley-Hamilton de la densité de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 13. *(Une autre preuve élémentaire à connaitre du théorème de Cayley-Hamilton). Soit $\mathbb{K}$ un corps (ou même un anneau intègre) et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ le plus petit sous espace stable par φ (l'endomorphisme associé à A) contenant x admet une base de la forme $\{x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{k-1}(x)\}$. En la complétant et calculant le polynome caractéristique de φ dans cette base vérifier que : $P_A(\varphi)(x) = 0$.*

Exercice 14. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C}^n)$ et $\mathscr{C}_A = \{ P^{-1}AP \,;\, P \in GL_n(\mathbb{C}) \}$*
- *Si A est nilpotente, montrer que $0 \in \overline{\mathscr{C}_A}$.*
- *Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathscr{C}_A$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{C})$.*

---

29 mai 2008 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
lassere@picard.ups-tlse.fr

AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES
◕ ☢ ALGÈBRE LINÉAIRE, EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES. ☢ ◕

2. Structure de $\mathcal{L}(E)$, réduction des endomorphismes.

Exercice 15. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^4 + A^3 - 2A^2 + A + I_n = 0$, montrer que n est pair et que $-Tr(A) \in \mathbb{N}$.*

Exercice 16. *Soit $A = ((a_{ij} = 1)) \in M_n(\mathbb{R})$. Sans aucun calcul déterminer le spectre de A, ses polynômes caractéristique et minimal, A est-elle diagonalisable ?*

Exercice 17. *Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, montrer l'équivalence entre*
$\rightarrow$ f est diagonalisable.
$\rightarrow$ Tout sous-espace de $\mathbb{R}^n$ posséde un supplémentaire stable par f

Exercice 18. *Etudier la diagonalisabilité de $\varphi\ :\ M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(A) = -A + Tr(A)I_n,\ A \in M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 19. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. S'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = B$, montrer que A est diagonalisable si, et seulement si B l'est.*

Exercice 20. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.*

Exercice 21. *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et deux entiers $n > p$; on se propose de démontrer que les groupes $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_p(\mathbb{K})$ ne sont pas isomorphes. Pour cela à l'aide du sous groupe G de $GL_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices diagonales à spectre dans $\{-1, +1\}$montrer qu'un tel isomorphisme ne peut exister.*

Exercice 22. *Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $A^p = B$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est.*

Exercice 23. *Soit $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = 1,\ 1 \leq i, j \leq n$. Expliquer sans calculs pourquoi A est diagonalisable, préciser ses valeurs propres ainsi qu'une base de vecteurs propres.*

Exercice 24. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.*

Exercice 25. *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.*
$\rightarrow$ Montrer que tout sous espace propre de f est stable par g.
$\rightarrow$ Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à f et g.
$\rightarrow$ Si f et g sont diagonalisables, montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à f et g.

Exercice 26. *Soit $G = \{A_1, \dots, A_p\} \subset M_n(\mathbb{C})$ un groupe multiplicatif . On pose $A = A_1 + \cdots + A_p$, calculer A^2 en déduire que A est diagonalisable et* $\det(A) \equiv 0(p)$.

Exercice 27. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3 et φ un endomorphisme de E vérifiant :*

$$\varphi^2 = \varphi^3,\ \varphi \neq 0,\ \varphi \neq I_3.$$

Montrer que la matrice de φ est semblable à l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, exprimer le rang de la transposée des cofacteurs de A en fonction du rang de A.*

Exercice 29. *Diagonaliser* $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 30. *Montrer que $M_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K}) + GL_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 31. *Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang r est semblable à une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Sur le groupe orthogonal.

Exercice 32. *Montrer que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ (matrices symétrique à valeurs propres strictement positives), ce résultat subsiste dans $M_n(\mathbb{R})$ sans l'unicité.*

Exercice 33. *Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ (même conclusion dans $GL_n(\mathbb{C})$ pour le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$).*

Exercice 34. *Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que les valeurs propres des éléments de G sont de module 1. Si $O_n(\mathbb{R}) < G$ et $GL_n(\mathbb{R})$ montrer qu'alors $G = GL_n(\mathbb{R})$ (i.e. $O_n(\mathbb{R})$ est maximal)(utiliser l'exercice 29). Même remarque que dans l'exercice précédent.*

Exercice 35. *Montrer que l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité $\mathcal{B}$ de $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme subordonnée à la structure Euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$ (si $\mathcal{C}$ est convexe, $x \in \mathcal{C}$ est extremal si et seulement si la propriété suivante est réalisée : $\forall y, z \in \mathcal{C}\ \forall t \in]0,1[$: $(x = ty + (1-t)z) \to (x = y = z)$).*

Exercice 36. *Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes qui sont connexes par arc.*

4. Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 37. *Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 38. *Soit $F \subset \mathbb{C}$ une partie fermée et $\mathcal{F} = \{M \in M_n(\mathbb{C})\ :\ sp(M) \subset F\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 39. *Montrer que l'ensemble* $\mathcal{P}_n$ *des projecteurs orthogonaux est une partie compacte de* $M_n(\mathbb{R})$ *(on pourra, mais ce n'est pas obligatoire utiliser l'exercice* 12 *).*

Exercice 40. *Montrer que les ensembles* $\{M \in \mathcal{P}_n \ : \ rang(M) = k\}$ *sont connexes par arcs et sont les composantes connexes de* $\mathcal{P}_n$*.*

Exercice 41. *Montrer que dans* $M_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé connexe par arcs d'intérieur vide. A l'aide de l'exercice précédent montrer que son enveloppe convexe est le sous espace des matrices de trace nulle.*

Exercice 42. *Montrer que l'application* $\varphi \,:\, M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[x]$ *qui à* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *associe* $\varphi(A) := \pi_A$ *son polynôme minimal, n'est pas continue, les deux espaces étant munis de leur topologie usuelle d'espace vectoriel normé (prendre* $A = I_n$ *et utiliser la densité de* $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ *vue plus bas...).*

Exercice 43. *Montrer que* $GL_n(\mathbb{K})$ *est un ouvert de* $M_n(\mathbb{K})$*. Montrer que l'application* $\varphi \,:\, A \in GL_n(\mathbb{K}) \mapsto \varphi(A) = A^{-1}$ *est continue. Si* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$*, montrer que* AB *et* BA *ont même polynôme caractéristique.*

Exercice 44. *(Matrices de Frobenius ou compagnon). On considère l'ensemble*

$$\mathscr{F} := \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ p_A = (-1)^n \pi_A \,\}.$$

- *Montrer que* $A \in \mathscr{F}$ *si et seulement si deg*$(\pi_A) = n$*, ou bien, si et seulement si il existe* $x_0 \in \mathbb{C}^n$ *tel que* $\{A^k x_0\}_{k=0}^{n-1}$ *soit une base de* $\mathbb{C}^n$*.*
- *Montrer que* $\mathscr{F}$ *est un ouvert connexe de* $M_n(\mathbb{C})$*.*

Exercice 45. *Soit* $\mathscr{N}$ *l'ensemble des matrices nilpotentes dans* $M_n(\mathbb{C})$*.*
- *Montrer que* $\mathscr{N}$ *est fermé dans* $M_n(\mathbb{C})$*.*
- *Quel est son intérieur ?*
- *Si* $n \geq 2$*, montrer que* $\mathscr{N}$ *est sans points isolés.*

Exercice 46.
- *Montrer que* $GL_n(\mathbb{R})$ *n'est pas connexe dans* $M_n(\mathbb{R})$*, déterminer ses composantes connexes, sont-elles connexes par arc ?*
- *Même question avec* $GL_n(\mathbb{C})$*.*
- *Déterminer les composantes connexes de* $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ *sont-elles connexes par arc ? Montrer que* $\mathscr{U}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arc.*

Exercice 47. *Montrer que dans* $M_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé connexe par arcs d'intérieur vide. Montrer que son enveloppe convexe est le sous espace des matrices de trace nulle (on pourra utiliser le fait que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls).*

Exercice 48. *Montrer que les ensembles* $\{M \in \mathscr{P}_n \ : \ rang(M) = k\}$ *sont connexes par arcs et sont les composantes connexes de* $\mathscr{P}_n$*.*

Exercice 49. *Montrer que* $GL_n(\mathbb{R})$ *est dense dans* $M_n(\mathbb{C})$*.*

Exercice 50. *Soit* F *un sous espace vectoriel de* $M_n(\mathbb{R})$ *possédant au moins une matrice inversible, montrer que* $F \cap M_n(\mathbb{R})$ *est dense dans* F*.*

Exercice 51. *Dans* $M_n(\mathbb{R})$ *montrer que l'adhérence des matrices diagonales est l'ensemble des matrices triangularisables. Même question dans* $M_n(\mathbb{C})$*.*

Exercice 52. *Montrer que dans $M_n(\mathbb{C})$ l'adhérence des ensembles*

$$\mathscr{A} = \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ \exists p \in \mathbb{N}^\star \ \textit{tel que}\ A^p = I_n \,\}$$

$$\mathscr{B} = \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ \textit{diagonalisables à valeurs propres de module}\ 1 \,\}$$

est l'ensemble des matrices à valeurs propres de module 1 (quelle relation y a t'il entre $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$?).

Exercice 53. *Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ (même conclusion dans $GL_n(\mathbb{C})$ pour le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$).*

Exercice 54. *Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive. Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et la décomposition est unique. Montrer qu'alors la bijection ainsi définie entre $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme topologique.*

Exercice 55. *Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que les valeurs propres des éléments de G sont de module 1. Si $O_n(\mathbb{R}) < G$ et $GL_n(\mathbb{R})$ montrer qu'alors $G = GL_n(\mathbb{R})$ (i.e. $O_n(\mathbb{R})$ est maximal)(on pourra utiliser l'exercice précédent). Même remarque que dans l'exercice précédent.*

Exercice 56. *Soit $F \subset \mathbb{C}$ une partie fermée et $\mathscr{F} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ sp(M) \subset F\}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 57. *Soit $K \subset M_n(\mathbb{C})$ une partie compacte et $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes valeur propre d'au moins un élément de K. Montrer que $\mathscr{K}$ est compact.*

Exercice 58. *Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}_n$ des projecteurs orthogonaux est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 59. *Soit F un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ possédant au moins une matrice inversible, montrer que $F \cap M_n(\mathbb{R})$ est dense dans F.*

Exercice 60. *Trouver dans $M_n(\mathbb{R})$ l'adhérence des matrices diagonales. Même question dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Références

[1] S.Francinou H.Gianella & S. Nicolas *Exercices de Mathématiques, oraux X-ENS, algèbre 1*, Cassini (2001).

[2] S.Francinou H.Gianella & S. Nicolas *Exercices de Mathématiques, oraux X-ENS, algèbre 2*, Cassini (2006).

[3] S.Francinou H.Gianella & S. Nicolas *Exercices de Mathématiques, oraux X-ENS, algèbre 3*, Cassini (2008).

[4] J.Chevallet *Exercices d'algèbre et de géométrie*, Vuibert supérieur (1996).

[5] C.Grunspan & E.Lanzmann *L'oral de mathématiques aux concours : Algèbre*, Vuibert supérieur (1994).

[6] E.Leichtnam *Exercices corrigés de mathématiques(X, E.N.S.) : Algèbre et géométrie*, Ellipses (1999).

[7] J.E.Rombaldi *Analyse matricielle : cours et exercices résolus*, EDP Sciences (1999).

[8] J.E.Rombaldi *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences (1999).

[9] D.Serre *Les Matrices*, Dunod (2001).

[10] P.Tauvel *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Algèbre 2*, Masson (1994).

[11] P.Tauvel *Exercices de d'algèbre linéaire*, Dunod (2004).

29 mai 2008

---

29 mai 2008 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice :Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr`