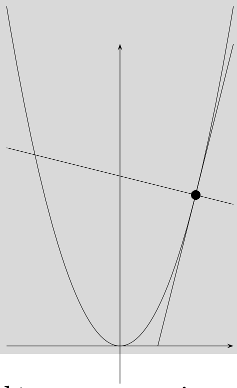
Agrégation interne de mathématiques – petits exercices électroniques

Exercice : On considère un point P, distinct de l'origine et situé sur la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$. La normale à $(\mathscr{P})$ passant par P recoupe la parabole en un point Q. Déterminer P pour que l'arc de parabole soit minimum.



Solution : Considérons un point (x, x^2), $(x > 0)$ sur la parabole. La pente de la normale à $(\mathscr{P})$ passant par (x, x^2) vaut $-1/2x$; si elle recoupe la parabole au point (z, z^2) nous aurons donc

$$\frac{z^2 - x^2}{z - x} = -\frac{1}{2x}$$

soit comme $x > 0$:

$$z = z(x) = -x - 1/2x = -\frac{2x^2 + 1}{2x}.$$

La formule pour la longueur d'un arc nous donne

$$s(x) = u(x) - u(z(x)), \qquad \text{avec} \quad u(a) = \int_0^a \sqrt{1 + 4t^2}dt$$

et il s'agit de minimiser $x \mapsto s(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Avec le théorème fondamental du calcul intégral nous avons

$$s'(x) = \sqrt{1 + 4x^2} - z'(x)\sqrt{1 + 4z^2(x)}, \qquad x > 0$$

qui se réduit aprés quelques calculs algébriques à

$$1 - 3x^2 = 0$$

i.e. $x = 1/\sqrt{3}$ et $x = -1/\sqrt{3}$ par symétrie.

29 février 2008 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
E-mail address: lassere@picard.ups-tlse.fr