Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1
Feuille de TD 2007-7

1. **Calcul de $\Gamma(1/2)$.**

   (a) Montrer que $\left(\int_0^\infty e^{-t^2}dt\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\int_{D_R} e^{-(u^2+v^2)}dudv$ où D_R est le disque de centre 0 et de rayon R,

   (b) Calculer cett dernière intégrale via un passage en coordonnées cylindriques et conclure.

2. **Fonctions eulériennes.** Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $p > 0$ et $q > 0$,
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

   (a) Montrer que $\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2x-1}dt$,

   (b) Justifier l'égalité $\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty}\int_{D_R} e^{-(u^2+v^2)}u^{2p-1}v^{2q-1}dudv$ où D_R est le disque de centre 0 et de rayon R,

   (c) Calculer cett dernière intégrale via un passage en coordonnées cylindriques et conclure.

3. **Volumes.** Calculer les volumes des corps suivants :

   (a) Le tétraèdre rectangle déterminé par les inéquations $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x+y+z \leq a$, $a > 0$ (via Fubini),

   (b) La sphère de rayon R. Dans ce dernier cas on mènera le calcul via Fubini et via un passage en coordonnées sphériques,

   (c) Le cylindre de hauteur h et de rayon R,

   (d) Le cône droit de hauteur h et de rayon R. Ces trois derniers volumes ont été obtenus par Archimède.

4. **Coordonnées hypersphériques.** Notons $V_n(R)$ le volume de la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ c'est à dire de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq R^2$. Nous allons montrer que
$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$
Pour ce faire on utilise le changement de coordonnées
$$\begin{array}{lcl}
x_1 & = & r\cos\phi_1 \\
x_2 & = & r\sin\phi_1\cos\phi_2 \\
x_3 & = & r\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3 \\
\vdots & & \\
x_{n-1} & = & r\sin\phi_1\sin\phi_2\ldots\sin\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1} \\
x_n & = & r\sin\phi_1\sin\phi_2\ldots\sin\phi_{n-2}\sin\phi_{n-1}
\end{array}$$
avec $r \geq 0$, $0 \leq \phi_i \leq \pi$ lorsque $1 \leq i \leq n-2$, $0 \leq \phi_{n-1} \leq 2\pi$.

(a) Montrer que c'est une bijection de $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma_n$ sur

$$]0,\infty[\times]0,\pi[\times \ldots \times]0,\pi[\times \times [0,2\pi[$$

où Σ_n est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_{n-1} = x_n = 0$.

(b) Montrer que le jacobien de cette transformation est

$$r^{n-1} \sin^{n-2}\phi_1 \sin^{n-3}\phi_2 \ldots \sin\phi_{n-2}.$$

(c) Calculer $V_n(R)$. On exprimera les intégrales $\int_0^\pi \sin^p\theta d\theta$ à l'aide de la fonction béta et cette dernière à l'aide de la fonction *Gamma* (exercice 2).