Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1
Feuille de TD 2007-5

1. **Exercices de révision.** Parmi ces intégrales impropres quelles sont convergentes et sous quelles conditions ?
   (a) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
   (b) $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
   (c) $\int_0^1 \frac{dt}{(\log t)^\beta t^\alpha}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   (d) $\int_1^\infty \frac{dt}{(\log t)^\beta t^\alpha}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   (e) $\int_0^1 \frac{e^{\gamma t} dt}{(\log t)^\beta t^\alpha}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,
   (f) $\int_1^\infty \frac{e^{\gamma t} dt}{(\log t)^\beta t^\alpha}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,
   (g) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x)x^{2/3}} dx$,
   (h) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$,
   (i) Calculer $\int_0^\infty e^{-t} t^n dt$, $n \in \mathbb{N}$.

2. **Dérivation sous le signe somme.** Calculer les dérivées des fonctions de x suivantes :
   (a) $\frac{d}{dx} \int_a^{v(x)} f(t)dt$,
   (b) $\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$,
   (c) $\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} g(t, x)dt$.

   et préciser sous quelles hypothèses ces calculs sont licites.

3. **Étude d'une fonction définie par une intégrale.** Notons $\phi(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que $\phi(\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ via le changement de variable $t = \tan(x/2)$,
   (b) Calculer $\int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha - \cos x)^2}$ (dériver $\phi(\alpha)$),
   (c) Montrer que $\int_0^\pi \log\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx = \pi \log\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)$ lorsque $a, b > 1$ (intégrer $\phi(\alpha)$ entre a et b).

4. **Étude d'une fonction définie par une intégrale.** On pose, pour tout $0 < x < 1$ et $\alpha > 0$, $g(x, \alpha) = (x^\alpha - 1)/\log x$.
   (a) Montrer que $\lim_{x \to 0} g(x, \alpha) = 0$ et que $\lim_{x \to 1} g(x, \alpha) = 1$.
   (b) Montrer que g ainsi définie est continue sur $[0, 1] \times]0, \infty[$. On devra montrer que $\lim_{(x,\alpha) \to (0,\alpha_0)} g(x, \alpha) = 0$ et que $\lim_{(x,\alpha) \to (1,\alpha_0)} g(x, \alpha) = \alpha_0$ pour tout $\alpha_0 > 0$.
   (c) On pose $\psi(\alpha) = \int_0^1 g(x, \alpha)dx$. Montrer que ψ est continue pour $\alpha > 0$.
   (d) Calculer $D_2 g(x, \alpha)$ et monter que l'on peut dériver ψ sous le signe d'intégration.
   (e)

5. **Théorème de la moyenne.** Montrer qu'il existe $\xi_1, \xi_2 \in [0,1]$ pour lesquels

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x^2+1} = \frac{2}{\pi(\xi_1^2+1)} = \frac{\pi \sin(\pi \xi_2)}{4}.$$

6. **Intégration par parties.** Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on pose $w(m,n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ que nous allons calculer.

   (a) Montrer que $w(m,n) = w(n,m)$,

   (b) Calculer $w(m,0)$,

   (c) Calculer $w(m,n)$ (intégrer par parties),

   (d) Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} t \sin^{2n+1} t dt$ lorsque $m, n \in \mathbb{N}$ (poser $x = \sin^2 t$),

   (e) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \sin^p t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^p t dt$ et calculer ces intégrales (intégrer par parties).

7. **Intégration par parties.** Calculer $\int_1^x t^n \log t dt$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

8. **Changements de variable.**

   (a) $\int_0^a x^2 e^{\sin(x^3)} \cos(x^3) dx = (e^{\sin(a^3)} - 1)/3$,

   (b) $\int_0^1 \frac{arctanx}{1+x^2} dx = \pi^2/32$,

   (c) Calculer $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2} ds$ via le changement de variable $t = 1/s$. Conclusion ?

   (d) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \pi/3$,

   (e) $\int_{-2}^2 \frac{1}{16-x^2} dx = (\log 3)/4$,

   (f) $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{u}\sinh^2(\sqrt{u})} du$ avec $x > 0$,

   (g) $\int_0^1 \frac{1}{(3+2x-x^2)^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{12}$,

   (h) $\int_a^b \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$ (on précisera pour quelles valeurs de a et b cette intégrale est définie).