Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1
Feuille de TD 2007-4

1. **Exercices de révision.** Donner les domaines de définition et les primitives des fonctions suivantes :

$x^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1,$	$x^{-1},$	$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$
$\sin x,$	$\cos x,$	$\tan x,$
$1/\sin x,$	$1/\cos x,$	$1/\tan x,$
$a^x,\ a > 0,$	$\exp x,$	$\log x,$
$\sinh x,$	$\cosh x,$	$\tanh x,$
$(a^2 - x^2)^{-1/2},$	$(x^2 \pm a^2)^{-1/2},$	$(x^2 + a^2)^{-1},$
$(x^2 - a^2)^{-1},$	$(x^2 \pm a^2)^{1/2},$	$(a^2 - x^2)^{-1/2}.$

2. **Fractions rationnelles.** Calculer les primitives de $\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3}$ et $\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2x+4)^2}$.

3. **Sommes de Riemann.**

   (a) Exprimer $\int_0^1 x^2 dx$ à l'aide de sommes de Riemann. En déduire la valeur de
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}.$$

   (b) Démontrer, en utilisant la méthode de l'exercice précédent, que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin(x/n) + \sin(2x/n) + \ldots + \sin((n-1)x/n)\right) = \frac{1-\cos x}{x}.$$

4. **Inégalités.**

   (a) Montrer que $2x/\pi \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$ et en déduire que $x^2/\pi \leq 1 - \cos x \leq x^2/2$ pour de tels x.

   (b) Montrer que $\left|\int_0^1 \frac{\cos x}{x+1}\right| dx \leq \log 2$.

5. **Théorème de la moyenne.** Montrer qu'il existe $\xi_1, \xi_2 \in [0,1]$ pour lesquels
$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x^2+1} = \frac{2}{\pi(\xi_1^2+1)} = \frac{\pi \sin(\pi \xi_2)}{4}.$$

6. **Intégration par parties.** Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ on pose $w(m,n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ que nous allons calculer.

   (a) Montrer que $w(m,n) = w(n,m)$,

   (b) Calculer $w(m,0)$,

   (c) Calculer $w(m,n)$ (intégrer par parties),

   (d) Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} t \sin^{2n+1} t dt$ lorsque $m, n \in \mathbb{N}$ (poser $x = \sin^2 t$),

   (e) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \sin^p t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^p t dt$ et calculer ces intégrales (intégrer par parties).

7. **Intégration par parties.** Calculer $\int_1^x t^n \log t dt$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

8. **Changements de variable.**

   (a) $\int_0^a x^2 e^{\sin(x^3)} \cos(x^3) dx = (e^{\sin(a^3)} - 1)/3$,

   (b) $\int_0^1 \frac{arctanx}{1+x^2} dx = \pi^2/32$,

   (c) Calculer $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2} ds$ via le changement de variable $t = 1/s$. Conclusion ?

   (d) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \pi/3$,

   (e) $\int_{-2}^2 \frac{1}{16-x^2} dx = (\log 3)/4$,

   (f) $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{u}\sinh^2(\sqrt{u})} du$ avec $x > 0$,

   (g) $\int_0^1 \frac{1}{(3+2x-x^2)^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{12}$,

   (h) $\int_a^b \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$ (on précisera pour quelles valeurs de a et b cette intégrale est définie).