Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1
Feuille de TD 2007-3

1. Montrer que la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et 1 si $x > 0$ ne possède pas de primitive stricte ($g$ est une primitive stricte de $f$ lorsque $g'(x) = f(x)$ pour tout $x$).

2. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

   (a) N'est pas une fonction réglée,

   (b) Possède une primitive stricte (considérer la fonction $x^2 \cos(1/x)$).

3. Montrer qu'une fonction réglée ne peut posséder qu'un ensemble au plus dénombrable de discontinuités (indication : une telle fonction est limite uniforme de fonctions en escalier).

4. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable il existe une bijection $q : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$. On notera $q_n$ pour $q(n)$. Ainsi les $q_n$ sont deux à deux distintcs et tout nombre rationnel est égal à un $q_n$ pour un entier $n > 0$ convenable. Pour tout nombre réel $r$ on note $f_r$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_r(x) = 0$ si $x < r$, $1/2$ si $x = r$ et 1 si $x > r$. On note enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_{q_n}(x).$$

   (a) Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$,

   (b) $f(x) = \sum_{q_n < x}^{\infty} 2^{-n} + \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 2^{-N-1} \text{ si } x = q_N, \end{cases}$

   (c) $f$ est strictement croissante, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$,

   (d) $f$ est réglée,

   (e) $f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

   (f) $f$ est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$ (on utilisera la définition de $f$). Que vaut $f_+(q_n) - f_-(q_n)$ ? Que vaut $\sum_{n=1}^{\infty} f_+(q_n) - f_-(q_n)$ ?

5. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

   (a) Soient $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2 \right)^{1/2}$$

   et qu'il y a égalité si et seulement si $u$ et $v$ sont collinéaires. Indication : on pourra considérer le polynôme $P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (\mid u_k \mid + \lambda \mid v_k \mid)^2$.

   (b) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réglées. Montrer que leur produit est aussi une fonction réglée et que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left( \int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \left( \int_a^b |g(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

   Indication : cette fois ci on pourra considérer le polynôme $P(\lambda) = \int_a^b (|f(t)| + \lambda |g(t)|)^2 \, dt$.

6. **Inégalité de Hölder.**

   Soient $p$ et $q \in ]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit qu'ils sont conjugués). Nous allons montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{1/q}$$

   (inégalité de Hölder).

   (a) Soient $u$, $v \in [0, +\infty[$, montrer que

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

   Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme.

   (b) En déduire l'inégalité de Hölder lorsque $\sum_{k=1}^{n} \mid u_k \mid^p = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} \mid v_k \mid^q = 1$.

   (c) En posant $\mid u'_k \mid = \dfrac{\mid u_k \mid}{(\sum_{k=1}^{n} \mid u_k \mid^p)^{1/p}}$ et $\mid v'_k \mid = \dfrac{\mid v'_k \mid}{(\sum_{k=1}^{n} \mid v_k \mid^q)^{1/q}}$, montrer l'inégalité de Hölder dans le cas général.

   (d) Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions réglées sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\, dt\right)^{1/q}.$$

   Indication : écrire les intégrales précédentes comme limites de sommes de Riemann.

7. **Inégalité de Minkowski.** Soit $p \in [1, +\infty[$. Nous allons montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \mid u_k + v_k \mid^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \mid u_k \mid^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} \mid v_k \mid^p\right)^{1/p}.$$

   Noter que le cas $p = 1$ est trivial. On supposera donc que $p > 1$.

   (a) Montrer que $\mid u + v \mid^p \leq \mid u \mid\mid u + v \mid^{p-1} + \mid v \mid\mid u + v \mid^{p-1}$ pour tout $u$, $v \in \mathbb{R}$.

   (b) Appliquer l'inégalité de Hölder à $p$ et $q \in ]1, +\infty[$ conjugués et conclure.

   (c) Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions réglées sur $[a, b]$ alors

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

   Indication : écrire les intégrales précédentes comme limites de sommes de Riemann.