Université Paul Sabatier | Premier semestre 2007-2008
Licence MAPES | Vendredi 14 décembre

Deuxième devoir d'Analyse

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$. On définit pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$H(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \quad \text{et} \quad u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) H(t, x-y) dy.$$

Exercice 1. Pour tout $R > 0$, on pose $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, et $C(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R, |y| \leq R\}$.

(1) Montrer que, pour $c = \sqrt{2}/2$, on a

$$\int_{C(0,cR)} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} dxdy \leq \int_{B(0,R)} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} dxdy \leq \int_{C(0,R)} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} dxdy.$$

(2) En utilisant la formule de Fubini, montrer que

$$\int_{C(0,R)} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} = \left(\int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{4}} dx \right)^2.$$

(3) Passer aux coordonnées polaires pour calculer la valeur de l'intégrale J_R définie par

$$J_R := \int_{B(0,R)} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} dxdy$$

(4) Montrer que, lorsque $R \to \infty$, J_R converge vers une limite. Calculer cette limite et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx.$$

Exercice 2. (1) Calculer les dérivées partielles suivantes de $H(t,x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t,x), \quad \frac{\partial}{\partial x} H(t,x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(t,x).$$

(2) Montrer que $H(t,x)$ satisfait l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(t,x)$$

ainsi que l'équation de Li-Yau

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log H(t,x) + \frac{1}{2t} = 0.$$

(3) Montrer que u possède des dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x), \quad \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

et donner leur expression en une expression intégrale en termes des dérivées partielles de H.

(4) En déduire que $u(t,x)$ vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x).$$

Exercice 3. (1) Montrer, par le changement de variable $y = x - z\sqrt{t}$, que

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - z\sqrt{t}) \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}} dz.$$

(2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to 0^+} \sup_{z \in \mathbb{R}} \left| f(x - z\sqrt{t}) \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}} - f(x) \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}} \right| = 0.$$

On pourra utiliser le théorème des accroissements finis pour majorer $\left|f(x - z\sqrt{t}) - f(x)\right|$ puis calculer le $\sup_z$ de la fonction résiduelle.

(3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to 0^+} u(t, x) = f(x).$$

Exercice 4. Pour calculer l'intégrale triple $\int_U f(x, y, z) dxdydz$ on effectue le changement de variable $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ où $a, b, c \neq 0$. On obtient alors une nouvelle intégrale : $\int_V g(u, v, w) dudvdw$.

(1) Donner l'expression de g et de V en fonction des données.

(2) Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$