Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1 – 2007

Premier problème, durée 4 heures, documents interdits

1. **Fonctions à variations bornées.** On note $VB[a,b]$ l'ensemble des fonctions à variations bornées sur l'intervalle $[a,b]$.

   (a) Rappeler la définition d'une telle fonction.

   (b) Donner un exemple de fonction à variations bornées qui soit discontinue ainsi que la valeur du nombre $V_f[a,b]$ correspondant à cet exemple.

   (c) Montrer que si $f \in VB[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$.

   (d) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in VB[a,b]$ alors $\lambda f \in VB[a,b]$ et $V_{\lambda f}[a,b] = |\lambda|\, V_f[a,b]$.

   (e) Montrer que si f et $g \in VB[a,b]$ alors $f+g \in VB[a,b]$ et $V_{f+g}[a,b] \leq V_f[a,b]+V_g[a,b]$.

2. **Développement dyadique d'un nombre réel.** Pour tout nombre réel $a \in [0,1[$ on pose

$$a_1 = 0 \text{ si } 0 \leq a < \frac{1}{2} \text{ et } a_1 = 1 \text{ si } \frac{1}{2} \leq a < 1.$$

   ainsi que

$$r_1 = 2\left(a - \frac{a_1}{2}\right) \in [0,1[.$$

   Supposons avoir construit $a_1, \dots, a_k \in \{0,1\}$ tels que

$$r_k = 2^k\left(a - \frac{a_1}{2} \dots - \frac{a_k}{2^k}\right) \in [0,1[.$$

   On applique alors à r_k ce que l'on a fait à a ce qui permet de construire par récurrence une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ de nombres entiers égaux à 0 ou 1 tels que $r_k \in [0,1[$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/2^k$ est convergente et que sa somme est a. Cette série est appelée *développement dyadique* de a ou bien *développement en base* 2.

3. **La courbe de Schoenberg.** Posons, pour tout $0 \leq t \leq 2$,

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1/3 \\ 3t-1 & \text{si} \quad 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ 1 & \text{si} \quad 2/3 \leq t \leq 4/3 \\ -3t+5 & \text{si} \quad 4/3 \leq t \leq 5/3 \\ 0 & \text{si} \quad 5/3 \leq t \leq 2 \end{cases}.$$

   On étend la définition de $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par périodicité : $\phi(t+2) = \phi(t)$. On définit enfin la courbe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ par

$$\alpha_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi\left(3^{2n-2}t\right)}{2^n}, \quad \alpha_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi\left(3^{2n-1}t\right)}{2^n}.$$

   (a) Tracer le graphe de ϕ sur $[-2,2]$.

   (b) Montrer que les séries définissant α convergent normalement et définissent des fonctions continues.

   (c) Montrer que $0 \leq \alpha_i(t) \leq 1$.

(d) Soit $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$. Nous voulons montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\alpha_1(c) = a$ et $\alpha_2(c) = b$. Pour ce faire on utilise des développements dyadiques de

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{et} \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$$

où $a_n, b_n = 0$ ou 1. On pose alors

$$c = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \text{ avec } c_{2n-1} = a_n \text{ et } c_{2n} = b_n,\ n \geq 1.$$

Montrer que $c \in [0,1]$.

(e) Montrer que si l'on prouve que

$$\phi(3^k c) = c_{k+1},\ k \geq 0,$$

alors $\alpha_1(c) = a$ et $\alpha_2(c) = b$.

(f) Montrer que

$$3^k c = (\text{entier pair}) \ + \ d_k \text{ avec } d_k = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n}.$$

(g) Calculer $\phi(d_k)$ (raisonner en fonction de la valeur de $c_{k+1} = 0$ ou 1) et conclure.

(h) Quand dit-t-on qu'une courbe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est rectifiable ?

(i) Montrer que la courbe α n'est pas rectifiable.