UNIVERSITÉ PAUL SABATIER – L3 MAPES – ANALYSE 1 – 2007-2008
EXAMEN, DURÉE 3 HEURES
DOCUMENTS, CALCULETTES, TÉLÉPHONES PORTABLES ET CETERA SONT INTERDITS

1. **Exercice.** Quand dit-on qu'un arc de courbe paramétré $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ est rectifiable ? Comment définit-on alors sa longueur ? Que vaut cette longueur lorsque C est de classe C^1 ? Montrer que le périmètre du cercle de centre a et de rayon R est $2\pi R$.

2. **Exercice.** On désigne par $B_n(a, R)$ la boule pour la norme euclidienne de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $R > 0$ et par $V_n(a, R)$ sa mesure. On a donc

$$B_n(a, R) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \leq R^2\right\}$$

et

$$V_n(a, R) = \int_{x \in B_n(a,R)} dx_1 \ldots dx_n.$$

   (a) Calculer $V_1(a, R)$ et $V_2(a, R)$.
   (b) Énoncer le théorème de changement de variable dans une intégrale multiple.
   (c) Montrer que $V_n(a, R) = R^n V_n(0, 1)$ (on utilisera le changement de variable $x = a + Ry$). On note $B_n = B_n(0, 1)$ et $V_n = V_n(0, 1)$.
   (d) Énoncer le théorème de Fubini.
   (e) Déterminer une fonction $f : B_2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$V_3 = \int_{(x_1,x_2) \in B_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

   et calculer $V_3(a, R)$.
   (f) Déterminer une fonction $g : B_2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$V_n = \int_{(x_1,x_2) \in B_2} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

   Calculer alors cette dernière intégrale en fonction de V_{n-2}. Donner enfin V_n en fonction de n.

3. **Exercice.**

   (a) On note, pour tout $R > 0$,

$$D_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq R^2\right\} \text{ et } C_R = [-R, R] \times [-R, R].$$

   Calculer l'intégrale

$$\int_{D_R} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) dxdy$$

   ainsi que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{D_R} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) dxdy.$$

(b) Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{D_R}\exp\left(-(x^2+y^2)\right)dxdy=\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\exp\left(-(x^2+y^2)\right)dxdy$$

et que cette dernière limite vaut

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)dx\right)^2.$$

En déduire la valeur de

$$I(0)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)dx.$$

On pose désormais, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\cos(\alpha x)dx \text{ et } J(\alpha)=\int_0^{+\infty}x\exp\left(-x^2\right)\sin(\alpha x)dx.$$

(c) Que signifie l'expression : "$J(\alpha)$ est une intégrale uniformément convergente sur $\mathbb{R}$" ?

(d) Montrer que $J(\alpha)$ est une intégrale uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $I'(\alpha)$ en fonction de $J(\alpha)$. On devra justifier ce calcul.

(e) En intégrant $I'(\alpha)$ par parties donner une équation différentielle du premier ordre dont $I(\alpha)$ est solution.

(f) Calculer $I(\alpha)$.