Université Paul Sabatier – L3 Mapes – Analyse 1 – 2007
Contrôle, durée 3 heures
Documents, calculettes, téléphones portables et cetera sont interdits

- **Exercice 1 (7 points)** Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

1. Quand dit-on que l'arc paramétré par α est rectifiable ?
2. Dans ce cas comment définit-on la longueur de l'arc ?
3. Lorsque $\alpha \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, quelle est la formulation intégrale de cette longueur ?
4. Étant donné $a > 0$ on note L_a la longueur de l'arc de parabole paramétré par $\alpha_a(x) = (x, ax^2) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq x \leq 1$. Montrer que
$$L_a \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + a^2 \left(\frac{2k-1}{n}\right)^2}$$
(cette quantité sera notée $R_{n,a}$). On pourra considérer la ligne polygonale dont les sommets sont les points de l'arc d'abscisses k/n, $0 \leq k \leq n$.
5. À quelle intégrale est égale la limite $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}$? (Remarquer que $R_{n,a}$ est une somme de Riemann).
6. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1 + 4a^2x^2}dx$ via le changement de variable $\sinh t = 2ax$.
7. Montrer que $\sqrt{1 + 4a^2x^2}$ converge uniformément sur $[0, 1]$, lorsque $a \to 0$, vers une fonction que l'on précisera.
8. Calculer $\lim_{a\to0} L_a$.

- **Exercice 2 (5 points)** Quels que soient les nombres réels $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on pose $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta dx$.

1. Montrer que $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$,
2. Calculer $B(\alpha, 0)$,
3. Montrer que $(\alpha + 1)B(\alpha, \beta) = \beta B(\alpha + 1, \beta - 1)$ lorsque $\beta \geq 1$,
4. Calculer $B(m, n)$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,
5. Exprimer $\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(t) \sin^\beta(t)dt$ lorsque α et $\beta \geq 1$ à l'aide de la fonction B,
6. Préciser ce résultat lorsque $\alpha = 2m + 1$ et $\beta = 2n + 1$, $m, n \in \mathbb{N}$.

- **Exercice 3 (8 points)** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par
$$f_n(x) = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 + x}.$$

1. Justifier en une phrase que $\int_0^1 f_n(x)dx$ est bien définie, pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{1}{1 + x} \text{ si } x \in [0, 1[\text{ et } f(1) = 0.$$

3. Justifier en une phrase que $\int_0^1 f(x)dx$ est bien définie.
4. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers f.
5. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1-\epsilon]$ vers f, pour tout $0<\epsilon<1$.
6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

   (Indication : on pourra considérer $\left|\int_0^1 f(x) - f_n(x)dx\right|$ et majorer $|f(x)-f_n(x)|$ par une fonction dont l'intégrale sur $[0,1]$ tend vers 0, quand n tend vers l'infini).
7. Montrer que
$$f_n(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^{2k} \text{ pour tout } x \in [0,1].$$
   En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f_n(x)dx$.
8. Montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente.
9. En déduire que
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.$$