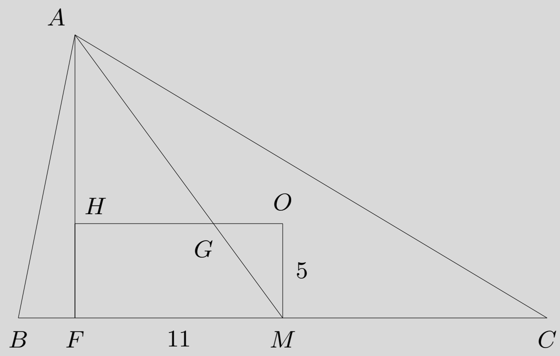
Agrégation interne de mathématiques – petits exercices électroniques

Exercice : Soit $HOMF$ un rectangle avec $HO = 11$, $OM = 5$. Soit ABC un rectangle tel que : H est à l'intersection des hauteurs, O est le centre du cercle circonscrit, M est le milieu de BC et F est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer la longueur du segment BC.



Solution 1 : On se fixe un repère où

$$O = (0,0),\ H = (-11,0),\ F = (-11,-5) \text{ et } M = (0,-5).$$

Comme B et C sont équidistants de M et O il existe $x > 0$ tel que

$$C = (x,-5) \text{ et } B = (-x,5),$$

il existe aussi $y \in \mathbb{R}$ tel que $A = (-11, y)$.
La hauteur issue de B passant par H, sa pente vaut $5/(x-11)$ et comme elle est perpendiculaire à AC qui admet comme pente $-(y+5)/(x+11)$ leur produit vaut -1, soit

$$5(y+5) = (x-11)(x+11). \tag{1}$$

D'autre part, A et B sont équidistants de 0, donc

$$y^2 + 11^2 = x^2 + 5^2. \tag{2}$$

(1) et (2) impliquent $y^2 - 5y - 50 = 0$ soit $y = 10$ ou $y = -5$ mais cette dernière possibilité est exclue ($y = -5$ implique $A = F$...) donc $y = 10$ et $BC = 2x = 28$.

Solution 2 : Le centre de gravité G du triangle est colinéaire avec H et O (c'est la droite d'Euler) et $OG = OH/3$ par conséquent $AF = 3OM = 15$. Il est facile de vérifier (les triangles HBF et CAF sont semblables) que

$$\angle(HBF) = \angle(CAF) = \pi - 2\angle(C).$$

Donc

$$\frac{BF}{FH} = \frac{AF}{FC}$$

soit

$$BF \cdot FC = FH \cdot AF = 5 \cdot 15 = 75.$$

Maintenant

$$BC^2 = (BF + FC)^2 = (FC - BF)^2 + 4BF \cdot FC$$

et comme M est le milieu de BC

$$FC - BF = (FM + MC) - (BM - FM) = 2FM = 2HO = 22,$$

donc

$$BC = \sqrt{(FC - BF)^2 + 4BF \cdot FC} = \sqrt{22^2 + 4 \cdot 75} = \sqrt{784} = 28.$$

Solution 3 : On choisit à nouveau un repère centré en O. O étant le centre du cercle circonscrit on a[1] $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ donc

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\overrightarrow{HA}}{2}.$$

soit $AH = 2OM = 10$.
Maintenant $OC = OA = \sqrt{AH^2 + HO^2} = \sqrt{221}$ et finalement

$$BC = 2MC = 2\sqrt{OC^2 - OM^2} = 2\sqrt{221 - 25} = 28.$$

27 septembre 2007 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr`

[1]Vous devez le savoir, sinon exercice...