

Exercice 1 : Soit $P(x) = 6 + 4x + 3x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 6x^6 \in \mathbb{R}[x]$, on pose pour $x \in [0, 5[$:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{P(t)} dt.$$

En quels point de $[0, 5[$, g atteint-elle sa borne inférieure? Que dire de sa borne supérieure?

Exercice 2 : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$; on suppose que $f(x + 3/10) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0, 7/10]$, montrer que f admet au moins 7 zéros dans $[0, 1]$.

Exercice 3 : En considérant $f(t) = \exp(e^{it})$ montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos(t)} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2}.$$