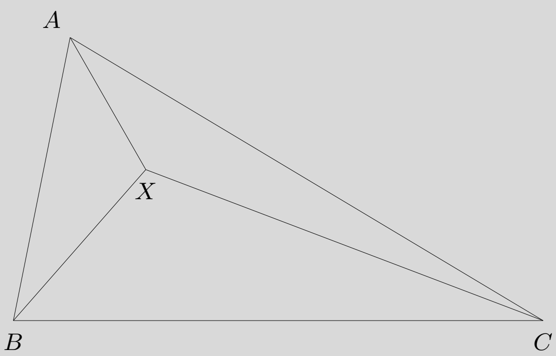
Agrégation interne de mathématiques – petits exercices électroniques
Aout 2008

Exercice 1 : Déterminer tous les polynômes unitaires $P \in \mathbb{C}[z]$ vérifiant $P(\mathbb{S}_1) \subset \mathbb{S}_1$ où $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ (on pourra calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta ...$). Et si P n'est pas unitaire ?

Exercice 2 : Soit X un point intérieur à un triangle ABC.
1) Montrer que

$$\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < AX + BX + CX < AB + BC + CA.$$

2) Que vaut $\displaystyle\max_{X \in ABC} (AX + BX + CX)$?



Exercice 3 : Soit $A = ((\alpha_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\alpha_{ij} = a_i + b_j$ pour tout couple (i, j) où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des réels distincts. Si les produits des composantes de chaque lignes sont égaux, montrer qu'il en est de même pour les colonnes.

Exercice 4 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non dénombrable. Montrer que $A \cap A' \neq \emptyset$ (A' est l'ensemble des points d'accumulation de A, ie les point adhérents à A qui ne sont pas isolés). Si A est dénombrable montrer que tout peut arriver ; et si A est fini ?

4 août 2008 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice :Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr`