Agrégation interne de mathématiques – petits exercices électroniques
☯☢ mai 2008 ☢☯

Exercice 1 : Dans un espace Euclidien E on considère un endomorphisme u de trace nulle.

a) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle les éléments diagonaux de la matrice de u sont nuls.

Exercice 2 : Soient $C, D, X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. on se propose de démontrer que $CX = XC$ implique

$$\det\begin{pmatrix} C & Y \\ X & D \end{pmatrix} = \det(CD - XY).$$

a) On suppose que $C \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que

$$\det\begin{pmatrix} C & Y \\ X & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_n & O \\ -XC^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & Y \\ X & D \end{pmatrix}$$

et conclure.
b) Traiter le cas général (i.e. $C \in M_n(\mathbb{C})$).

Exercice 3 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-k} \geq \left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Exercice 4 : Un ver de terre a faim, il s'introduit dans une pomme (de forme sphérique) de 51mm de rayon en un point A il en ressort plus tard en un point B, rassasié en ayant parcouru dans la pomme un chemin de 101mm. Montrer qu'il est alors toujours possible de couper la pomme en deux demi-hémisphères où l'un d'entre-eux n'a pas été souillé par le ver.

Exercice 5 : Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1])$ telles que $\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$, montrer que

$$\int_0^1 f^2(t)dt\int_0^1 g^2(t)dt \geq 4\left(\int_0^1 f(t)dt\int_0^1 g(t)dt\right)^2$$

27 mai 2008 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice :Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr`