Exercice 1 : On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection continue. Montrer que f est strictement monotone.
2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un difféomorphisme. Que peut-on dire sur la fonction dérivée f' ?
3) Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels, de coefficients dominant positifs. On note $x_1 < \cdots < x_p$ les racines réelles du polynôme dérivé P' de multiplicités respectives $m_1 < \cdots < m_p$ et $y_1 < \cdots < y_q$ celles de Q' de multiplicités respectives $n_1 < \cdots < n_q$.

(a) On suppose qu'il existe un difféomorphisme croissant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $Q = P \circ f$.

i. Montrer que $p = q$ et que $f(y_i) = x_i$ pour $i = 1 \cdots p$.
ii. Montrer que $m_i = n_i$, pour $i = 1 \cdots p$.

(b) On suppose maintenant que $p = q$ et $m_i = n_i$, pour $i = 1 \cdots p$.

i. Montrer qu'il existe une unique fonction continue strictement croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Q = P \circ f$ et $f(y_i) = x_i$ pour $i = 1 \cdots p$.
ii. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{y_1, \cdots, y_p\}$.
iii. Montrer que f est dérivable en $y_1, \cdots, y_p$ et calculer $f'(y_i)$ pour $i = 1 \cdots p$.
iv. Montrer que f est un difféomorphisme.

Exercice 2 : *Le but de cet exercice est la construction d'une fonction infiniment dérivable non identiquement nulle et nulle en dehors d'une intervalle fermé.*
Étant donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on appelle support de f le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ tel que f soit nulle sur son complémentaire. Si le support est borné, on dit que f est à support compact. Soit α un réel strictement positif, on définit la fonction H_α sur $\mathbb{R}$ par

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} 1/\alpha, & \text{si } x \in]0, \alpha[, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que la série $\sum_n a_n$ converge, on note a sa somme. Pour $m \in \mathbb{N}$ on désigne par $\mathscr{C}^m_{0,a}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^m$ sur $\mathbb{R}$ à support inclu dans $[0, a]$.

1) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou possédant un nombre fini de discontinuités et à support compact. On définit la fonction $f * g$ pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt.$$

Montrer que $f * g$ est une fonction à support compact et plus précidément si pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star_+$, f (resp. g) est à support compact dans $[0, \alpha]$ (resp. $[0, \beta]$), alors $f * g$ est à support compact dans $[0, \alpha + \beta]$. Donner également une expression simple de

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)dx.$$

2) On définit la fonction u_1 par

$$u_1 = H_{a_0} * H_{a_1}.$$

Déterminer explicitement u_1 et en déduire m_1 le plus grand entier tel que u_1 appartienne à $\mathscr{C}^m_{0,a}$.
3) On définit maintenant la fonction u_k par

$$u_k = u_{k-1} * H_{a_k}.$$

Déterminer m_k le plus grand entier tel que u_k appartienne à $\mathscr{C}^m_{0,a}$.
4) Montrer que pour $k \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $j \leq m_k$,

$$|u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{2^j}{a_0 \dots a_j}.$$

5) Montrer que pour tout couple d'entiers k, m supérieurs ou égaux à 2, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|u_{k+m}(x) - u_m(x)| \leq 2 \cdot \frac{a_{m+1} + \cdots + a_{m+k}}{a_0 a_1}.$$

6) Montrer que, quand k tends vers $+\infty$, la suite $(u_k)_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u appartenant à $\mathscr{C}^\infty_{0,a}$. Montrer également que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1.$$

On peut en fait montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

Exercice 3 : Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, construire une fonction $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^\star)$ telle que $F = f^{-1}(0)$. Commencer par traiter le cas où $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ est un intervalle.

Solution : Lorsque $\Omega =]a, b[,\ a, b \in \mathbb{R}$ on peut choisir

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-(x-a)^{-2}(x-b)^{-2}\right), & x \in]a, b[\\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

et si Ω est non borné, par exemple $\Omega =]a, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-(x-a)^{-2}\right), & x \in]a, +\infty[\\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Ces fonctions sont classiquement $\mathscr{C}^\infty$ et vérifient les propriétés recquises. Il est important pour la suite de bien observer que les dérivées à tout ordre de ces fonctions sont bornées sur $\mathbb{R}$.

➪ Pour un fermé arbitraire F de $\mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ est réunion au plus dénombrable[1] d'intervalles deux à deux disjoints

$$\Omega = \bigcup_n]a_n, b_n[.$$

Si l'on désigne par f_n la fonction associée à $]a_n, b_n[$ dans la première étape, posons pour tout entier n

$$M_n = \max_{0 \leq k \leq n} \sup \left\{ |f_n^{(k)}(x)|,\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors le théorème de Weierstrass de dérivation des séries de fonctions assure que la formule

$$f = \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{n^2 M_n}$$

définit une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui possède les propriétés désirées. ∎

---

29 février 2008 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice :Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr`

[1] Ω est la réunion disjointe de ses composantes connexes qui sont des intervalles et sont au plus dénombrable car $\mathbb{R}$ admet une base dénombrable de voisinages (les intervalles à extrémités rationelles).