

Exercice 1 : Dans un espace Euclidien E on considère un endomorphisme u de trace nulle.

- a) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle les éléments diagonaux de la matrice de u sont nuls.

Exercice 2 : Soient $C, D, X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. on se propose de démontrer que $CX = XC$ implique

$$\det \begin{pmatrix} C & Y \\ X & D \end{pmatrix} = \det(CD - XY).$$

- a) On suppose que $C \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que

$$\det \begin{pmatrix} C & Y \\ X & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & O \\ -XC^{-1} & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} C & Y \\ X & D \end{pmatrix}$$

et conclure.

- b) Traiter le cas général (i.e. $C \in M_n(\mathbb{C})$).

Exercice 3 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-k} \geq \left(\frac{n+1}{2^n} \right)^{\frac{n+1}{2}}.$$