Agrégation interne de mathématiques – petits exercices électroniques
17 mars 2008

Exercice 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, établir l'équivalence des propriétés :
1) La seule valeur propre de A est 1.
2) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \cdots = \text{tr}(A^n) = n$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comme $\text{rang}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$ pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est immédiate.
Pour (2) $\Rightarrow$ (1), remarquons que $\text{spec}(A - I_n) = \{\, \lambda - 1, \lambda \in \text{spec}(A)\}$, il est donc suffisant de montrer que la seule valeur propre de $A - I_n$ est 0 ou encore que $A - I_n$ est nilpotente.
Or, d'aprés un exercice « classique » (Francinou-Gianella-Nicolas, oraux X-ENS Algèbre 2, ex.2.33, pp 117), $A - I_n$ est nilpotente, si et seulement si, $\text{tr}(A - I_n)^k = 0$ pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, et cette dernière vérification est élémentaire car :

$$\text{tr}(A - I_n)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l \text{tr}(A^{k-l}) = n \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l = (1-1)^k = 0.$$

❏

Exercice 2 : a) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x) + f(2x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
b) Soient $a, b, c > 0$ deux à deux distincts. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Soit f une solution de l'équation fonctionnelle, clairement $f(0) = 0$, et en remplacant x par $x/2$ on a pour tout x réel : $f(x) + f(x/2) = 0$ soit $f(x) = -f(x/2) = f(x/2^2) = \cdots = (-1)^k f(x/2^k),\ k \in \mathbb{N}$. De là, par continuité de f à l'origine

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} (-1)^k f(x/2^k) = f(0) = 0,$$

f est donc identiquement nulle. Réciproquement la fonction identiquement nulle vérifie l'équation fonctionnelle, c'est donc l'unique solution.

Remarques : On a seulement utilisé la continuité à l'origine, et on peut remplacer 2 par tout autre réel strictement positif.

b) Sans perdre de généralité, supposons $a > b > c$ et soit f une solution de l'équation, comme dans la première question on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= -f\left(\frac{bx}{a}\right) - f\left(\frac{cx}{a}\right) \\ &= f\left(\frac{b^2x}{a^2}\right) + 2f\left(\frac{bcx}{a^2}\right) + f\left(\frac{c^2x}{a^2}\right) \\ &= -f\left(\frac{b^3x}{a^3}\right) - 3f\left(\frac{b^2cx}{a^3}\right) - 3f\left(\frac{bc^2x}{a^3}\right) - f\left(\frac{c^3x}{a^3}\right) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{b^k c^{n-k} x}{a^n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte d'une récurrence élémentaire sur n. f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut dériver cette dernière expression à tout ordre :
(★)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall N, n \in \mathbb{R}\ :\ f^{(N)}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{b^k c^{n-k}}{a^n}\right)^N f^{(N)}\left(\frac{b^k c^{n-k} x}{a^n}\right).$$

Fixons x dans $\mathbb{R}$, comme $a > b > c > 0$ on a $|b^k c^{n-k} x/a^n| < |b^n x/a^n| \leq |x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Donc, avec (★) nous avons pour tout $x \in \mathbb{R},\ n, N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f^{(N)}(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{b^k c^{n-k}}{a^n}\right)^N \|f^{(N)}\|_{[-x,x]} \\ &\leq \|f^{(N)}\|_{[-x,x]} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{b}{a}\right)^{nN} = \|f^{(N)}\|_{[-x,x]} \left(\frac{2b^N}{a^N}\right)^n \end{aligned}$$

Fixons N suffisament grand pour que $0 < 2b^N/a^N < 1$ et $x \in \mathbb{R}$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(N)}(x)| \leq \|f^{(N)}\|_{[-x,x]} \left(\frac{2b^N}{a^N}\right)^n,$$

on en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $f^{(N)}(x) = 0$ pour tout réel x : f est donc un polynôme $f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0$. L'équation fonctionnelle s'écrit alors

$$a_d(a^d + b^d + c^d)x^d + \dots + a_1(a + b + c) + 3a_0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a, b, c étant strictement positifs : la seule alternative est $a_d = \dots = a_1 = a_0 = 0$. f est donc identiquement nulle. Réciproquement la fonction identiquement nulle vérifie l'équation fonctionnelle, c'est donc l'unique solution. ❏

Exercice 3 : a) Montrer que pour tout $0 < x < 1$

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_{1-x}^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt.$$

b) En admettant que $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que

$$f(1/2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \frac{\pi^2}{12}.$$

a) Pour $x \in]0,1[$ les intégrales sont clairement convergentes. Pour établir la formule demandée il suffit de faire le changement de variables $u = 1-t$.

b) Pour $x = 1/2$ nous avons

$$\begin{aligned} f(1/2) &= \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^{1/2} -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt \\ &\overset{\bigstar}{=} -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1/2} \frac{t^{n-1}}{n} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} \end{aligned}$$

où l'échange $\int \sum = \sum \int$ est justifié par la normale convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ de rayon de convergence 1 sur l'intervalle d'intégration $[0,1/2]$.

Vu (a) une intégration par parties (légitime) nous donne

$$f(1/2) = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = -\int_{1/2}^1 \ln(t)\,[\ln(1-t)]'\,dt = \ln^2(2) + \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt,$$

soit

$$\begin{aligned} f(1/2) &= \ln^2(2) - \int_{1/2}^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt \\ &\overset{\bigstar}{=} \ln^2(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{1/2}^1 \frac{t^{n-1}}{n} dt \\ &= \ln^2(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^{-n}}{n^2} = \ln^2(2) - \frac{\pi^2}{6} - f(1/2) \end{aligned}$$

soit $f(1/2) = \dfrac{\ln^2(2)}{2} - \dfrac{\pi^2}{12}$. L'échange $\int \sum = \sum \int$ ci-dessus étant cette fois justifiée par la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/2}^1 \left| \frac{t^{n-1}}{n} \right| dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2^{-n}}{n^2}$. ❏

Exercice 4 : Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}^{\star +})$.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, établir l'existence de $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$0 = a_{n,0} < \cdots < a_{n,n} = 1 \ \text{ et } \ \forall i \in \{0,\dots,n-1\} \ : \ \int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt.$$

b) Déterminer la limite, quand n tends vers $+\infty$ de : $\dfrac{a_{n,0} + \cdots + a_{n,n}}{n+1}$.

a) f étant continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives l'application F : $[0,1] \ni x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est continue, strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0, \int_0^1 f(t)dt]$: par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_{n,0}, \dots, a_{n,n}$ dans $[0,1]$ tels que

$$F(a_{n,k}) = \frac{k}{n} \int_0^1 f(t)dt, \quad k = 0, \dots, n.$$

et ces réels sont uniques.

b) Vu ce qui précède, $F^{-1} \in \mathscr{C}([0, \int_0^1 f(t)dt], [0,1])$, la suite $(\frac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt)_{k=0}^n$ est une subdivision de l'intervalle $[0, \int_0^1 f(t)dt]$, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,0}+\cdots+a_{n,n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n F^{-1}\left(\frac{k}{n}\int_0^1 f(t)dt\right) = \int_0^{\int_0^1 f(u)du} F^{-1}(t)dt.$$

❑

Exercice 5 : Soient $A, H \in M_n(\mathbb{R})$, si $\mathrm{rg}(H) = 1$, montrer que

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq (\det(A))^2.$$

---

17 mars 2008 Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, laboratoire E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: `lassere@picard.ups-tlse.fr`