Agrégation interne de mathématiques – petits exercices électroniques

Exercice 1 : On considère une ligne brisée dont les longueurs $L_1, L_2, \dots L_n, \dots$ des segments successifs $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ valent respectivement $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on suppose en outre que chaque segment fait avec le précédent un angle θ. Déterminer la distance et l'angle entre l'extrémité initiale et finale (lorsqu'elle existe...) de cette ligne brisée.

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[n]$ désigne l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{[n]} + 2^{-[n]}}{2^n} = 3.$$

Exercice 3 : 0n considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\det(A + X) = \det(X), \quad \forall\, X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que A est la matrice nulle. En déduire que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient $\forall\, X \in M_n(\mathbb{R})\ :\ \det(A + X) = \det(B + X)$, alors $A = B$.

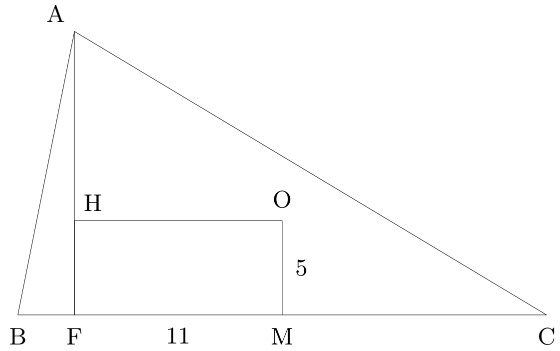
Exercice 4 : Pour quels couples $(a, b) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ l'intégrale impropre

$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} \right) dx$$

converge ?

Exercice 5 : Soit A l'aire du domaine borné délimité par la droite $y = x/2$, le premier quadrant et l'ellipse d'équation $x^2/9 + y^2 = 1$. Déterminer un réel positif m tel que A coïncide avec l'aire du domaine borné délimité par la droite $y = mx$, le premier quadrant et l'ellipse d'équation $x^2/9 + y^2 = 1$.

Exercice 6 : Soit $HOMF$ un rectangle avec $HO = 11$, $OM = 5$. Soit ABC un rectangle tel que : H est à l'intersection des hauteurs, O est le centre du cercle circonscrit, M est le milieu de BC et F est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer la longueur du segment BC.



Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x),\ (x \to 0),$$

montrer que $\quad f(x) = o(x),\ (x \to 0)$.

Exercice 8 : Soient $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ telles que $A, A+B, A+2B, A+3B$ et $A+4B$ soient inversibles à inverses dans $M_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $A+5B$ est inversible et que son inverse est encore à coefficients entiers.

Exercice 9 : $C(\alpha)$ désignant le coefficient de x^{2007} dans le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, calculer

$$\int_0^1 C(-t-1)\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} + \cdots + \frac{1}{t+2007}\right) dt.$$

Exercice 10 : Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(\text{✘}) \qquad f^2(x) = \int_0^x \left(f^2(t) + f'^2(t)\right) dt + 2007, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11 : Montrer que

$$\int_0^{\infty}\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\dots\right)\times \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\dots\right)dx=\sqrt{e}.$$

Exercice 12 : Combien existe-t-il de nombres premiers de la forme $N = 10101\dots01$ (ie où l'écriture en base 10 de N est constituée d'une alternance de 0 et de 1, par exemple $N = 101...$) ?

Exercice 13 : Montrer que tout triangle $\Delta(A, B, C)$ aigu (i.e. tous les angles sont dans $]0, \pi/2[$) de cotés le longueur respectifs a, b, c on a l'inégalité

$$27 \leq (a+b+c)^3\left(\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}\right).$$

Exercice 14 : Une particule se déplace sur la droite réelle avec une accélération croissante pour $t \in [0, T]$. Montrer que sa vitesse au temps $t = T/2$ ne peut excéder sa vitesse moyenne $\int_0^T v(t)dt/T$.

Exercice 14 :

21 novembre 2007 Agrégation Interne de Mathématiques. Lassère Patrice : Laboratoire de Mathématiques E.Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.

E-mail address: lassere@picard.ups-tlse.fr