Corrigé

Stabilité d'un polynôme trigonométrique

I Stabilité d'un polynôme trigonométrique

1. Pour tout c de E on note :

$$||c|| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \in \mathbb{R}^+$$

.

- $||c|| = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_n = 0 \Leftrightarrow c = 0$
- $\forall c \in E\ \exists K \in \mathbb{N}$, $\exists (c_{-K}, ..., c_K) \in \mathbb{C}^{2K+1}$ tels que $c(x) = \displaystyle\sum_{k=-K}^{K} c_k e^{ikx}$

  $\forall c \in E$,$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ on a une écriture du type $\lambda c(x) = \displaystyle\sum_{k=-K}^{K} \lambda c_k e^{ikx}$

  $\forall c \in E$,$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\exists K \in \mathbb{N}$ tel que

  $||\lambda c|| = \displaystyle\sum_{k=-K}^{K} |\lambda c_k| = |\lambda| \sum_{k=-K}^{K} |c_k| = |\lambda|.||c||$
- $\forall (c_1, c_2) \in E^2$, en prenant $K \in \mathbb{N}$, $K \geq \max(\deg c_1, \deg c_2)$ on peut écrire : $c_1(x) = \displaystyle\sum_{n=-K}^{K} c_{1,n} e^{inx}$, $c_2(x) = \displaystyle\sum_{n=-K}^{K} c_{2,n} e^{inx}$

  $||c_1 + c_2|| = \displaystyle\sum_{n=-K}^{K} |c_{1,n} + c_{2,n}| \leq \sum_{n=-K}^{K} |c_{1,n}| + \sum_{n=-K}^{K} |c_{2,n}| = ||c_1|| + ||c_2||$

2. Soit $c \in E$ et $K = \deg c$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} c(t) e^{-ipt} dt = \sum_{k=-K}^{K} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{i(k-p)t} dt$

   Mais $\forall r \in \mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{irt} dt = \left[\frac{e^{irt}}{ir}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^r - (-1)^r}{ir} = 0.$

   Donc si $p \in \{-\deg(c), ..., \deg(c)\}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(x) e^{-ipx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_p e^{0t} dt = c_p.$$

3. Pour tout c de E, il existe $K \in \mathbb{N}$ et des complexes $c_{-K}, ..., c_K$ tels que $c(x) = \displaystyle\sum_{n=-K}^{K} c_n e^{inx}$, pour tout x réel. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$:

   $|c(x)| \leq \displaystyle\sum_{n=-K}^{K} |c_n e^{inx}| = \sum_{n=-K}^{K} |c_n| = ||c||$

   c est bornée sur $\mathbb{R}$ et $||c||_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}} |c| \leq ||c||$

En prenant c non nul et $K = \deg c$ et en utilisant la question précédente :
$\forall p \in \mathbb{Z}$ avec $|p| \leq K$, $|c_p| = \dfrac{1}{2\pi}\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} c(x)e^{-ipx}dx\right| \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|c(x)||e^{-ipx}|dt$
$|c_p| \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|c(x)|\right) \times 1dx = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}||c||_\infty dx = ||c||_\infty$
Finalement : $||c|| = \displaystyle\sum_{p=-K}^{K}|c_p| \leq (2K+1)||c||_\infty$ et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|c(x)| \leq ||c|| \leq (2\deg c + 1)\sup_{x\in\mathbb{R}}|c(x)|$$

Définition 2 *On dira que le polynôme trigonométrique c est stable lorsque la suite $||c^k||$ des normes de ses puissances successives est bornée quand k décrit $\mathbb{N}$.*

4. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|c(x_0)| = M_0 > 1$.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $M_0^k = |c(x_0)|^k \leq \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|c^k(x)| \leq ||c^k||$.
Comme $M_0 > 1$,par minoration, $\displaystyle\lim_{k\mapsto+\infty} M_0^k = \lim_{k\mapsto+\infty}||c^k||+\infty$. c n'est pas stable.

II Un polynôme trigonométrique particulier

$\alpha \in]0,1[$, $a(x) = \alpha^2\cos x - i\alpha\sin x + 1 - \alpha^2$
Pour tout entier $k \geq 2$, $a^k(x) = \displaystyle\sum_{n=-k}^{k} a_{k,n}e^{inx}$

5. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|a(x)|^2 = & \quad (\alpha^2(\cos x - 1) + 1)^2 + \alpha^2\sin^2 x \\
= & \quad \left(\alpha^2(-2\sin^2\tfrac{x}{2}) + 1\right)^2 + \alpha^2\sin^2 x \\
= & \quad 4\alpha^4\sin^4\tfrac{x}{2} - 4\alpha^2\sin^2\tfrac{x}{2} + 1 + \alpha^2\sin^2 x \\
= & \quad 4\alpha^4\sin^4\tfrac{x}{2} - 4\alpha^2\sin^2\tfrac{x}{2} + 1 + 4\alpha^2\sin^2\tfrac{x}{2}\cos^2\tfrac{x}{2} \\
= & \quad 4\alpha^4\sin^4\tfrac{x}{2} + 1 + 4\alpha^2\sin^2\tfrac{x}{2}\left(\cos^2\tfrac{x}{2} - 1\right) \\
= & \quad 1 - 4\left(\alpha^2 - \alpha^4\right)\sin^4\tfrac{x}{2}
\end{aligned}$$

On a $a(0) = 1$ et comme $\alpha^2(1-\alpha^2) > 0$, $|a(x)| < 1$ pour tout $x \in]0,\pi]$.

6. Comme $\sin x =_0 x + o(x)$, $|a(x)|^2 = 1 - 4\left(\alpha^2 - \alpha^4\right)\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)$.
Mais $\ln(1+X) =_0 X + o(X)$ donc :
$g(x) = \ln\left(|a(x)|^2\right) = -\dfrac{\alpha^2 - \alpha^4}{4}x^4 + o(x^4)$.
De même : $\dfrac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} = \dfrac{-\alpha\sin x}{1 - \alpha^2(1-\cos x)} = \dfrac{-\alpha\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{1 - 2\alpha^2\sin^2\frac{x}{2}}$

$$\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} = \frac{-\alpha\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{1 - 2\alpha^2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^4)\right)^2} = \frac{-\alpha\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{1 - \alpha^2\frac{x^2}{2} + \alpha^2\frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

$$\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} = \frac{-\alpha x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)}{1 - \alpha^2\frac{x^2}{2} + o(x^3)} = -\alpha x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \alpha^2\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))} = -\alpha x\left(1 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right)x^2 + o(x^3)\right) = -\alpha x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{2}\right)x^3 + o(x^4)$$

Comme, au voisinage de 0, $\arctan(X) = X - \dfrac{X^3}{3} + o(X^4)$, par composition :

$$\arctan\left(\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))}\right) = -\alpha x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha^3}{2}\right)x^3 + \frac{\alpha^3 x^3}{3} + o(x^4)$$

$$h(x) = \arctan\left(\frac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))}\right) = -\alpha x + \left(\frac{\alpha - \alpha^3}{6}\right)x^3 + \frac{\alpha^3 x^3}{3} + o(x^4)$$

7. $\lim\limits_{x \mapsto 0} a(x) = 1$. Dans un voisinage de 0, $\mathcal{R}(a(x)) > 0$ et, si dans ce voisinage on note $\theta(x)$ l'élément de $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $a(x) = |a(x)|e^{i\theta(x)}$, on a :
$\tan(\theta(x)) = \dfrac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))}$ et donc $\theta(x) = \arctan\left(\dfrac{\mathcal{I}(a(x))}{\mathcal{R}(a(x))}\right)$
Au voisinage de 0, on peut écrire :

$$a(x) = |a(x)|e^{i\theta(x)} = e^{\frac{g(x)}{2}}e^{ih(x)} \qquad \text{puis en remplaçant}$$

$$a(x) = \exp\left(-i\alpha x + i\frac{\alpha - \alpha^3}{6}x^3 - \frac{\alpha^2 - \alpha^4}{8}x^4 + o(x^4)\right).$$

Il existe donc trois réels α, β et γ strictement positifs et une fonction $\varepsilon : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, tendant vers 0 quand x tend vers 0 tels que l'on ait, pour tout x dans un voisinage de 0,

$$a(x) = \exp\left(-i\alpha x + i\beta x^3 - \gamma x^4\left(1 + \varepsilon(x)\right)\right)$$

On admet que la fonction ε est définie et de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$. Dans la suite, on posera

$$d(x) = \exp\left(-i\alpha x + i\beta x^3\right) \text{ et } b(x) = \exp\left(-\gamma x^4\left(1 + \varepsilon(x)\right)\right),$$

de sorte que $a(x) = d(x)b(x)$ et $|a(x)| = |b(x)|$.

III Majoration des coefficients de a^k

Soit $[r, s] \subset \mathbb{R}$ avec $r < s$. f est C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie :
$\forall t \in [r, s]$, $|f'(t)| \geq K < 0$ et $f''(t) \geq 0$.

8. $\displaystyle\int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}dt = \left[\frac{-1}{f'(t)}\right]_r^s = \frac{1}{f'(r)} - \frac{1}{f'(s)}$
Par suite :

$$\left|\int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}dt\right| \leq \frac{1}{|f'(r)|} + \frac{1}{|f'(s)|} \leq \frac{2}{K}.$$

9.

$$\int_r^s \frac{1}{f'(t)}\left(f'(t)\cos f(t)\right)dt = \left[\frac{1}{f'(t)}\sin f(t)\right]_r^s - \int_r^s \left(\frac{-f"(t)}{(f'(t))^2}\right)\sin f(t)dt$$

$$\int_r^s \cos f(t)dt = \frac{\sin f(s)}{f'(s)} - \frac{\sin f(r)}{f'(r)} + \int_r^s \left(\frac{f"(t)}{(f'(t))^2}\right)\sin f(t)dt$$

$$\left|\int_r^s \cos f(t)dt\right| \leq \frac{1}{|f'(s)|} + \frac{1}{|f'(r)|} + \left|\int_r^s \left(\frac{f"(t)}{(f'(t))^2}\right)\sin f(t)dt\right|.$$

$$\left|\int_r^s \cos f(t)dt\right| \leq \frac{2}{K} + \int_r^s \left|\frac{f"(t)}{(f'(t))^2}\sin f(t)\right| dt$$

$$\left|\int_r^s \cos f(t)dt\right| \leq \frac{2}{K} + \int_r^s \frac{|f"(t)|}{(f'(t))^2}\times 1dt \leq \frac{2}{K} + \frac{2}{K} = \frac{4}{K}$$

en utilisant la question 8. et le fait que $f" \geq 0$.

Dans les questions 10 à 12, $[u,v]$ désigne un segment de longueur non nulle de $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe C^2 sur $[u,v]$ à valeurs réelles. On suppose cette fois que $f"(t) \geq M > 0$ pour tout t appartenant à $[u,v]$.

10. On suppose que $f'(u) \geq 0$. Soit $t \in [u+2/\sqrt{M}, v]$: $f'(t) - f'(u) = \displaystyle\int_u^t f"(x)dx$.
Comme $f'(u) \geq 0$, $f'(t) \geq \displaystyle\int_u^t f"(x)dx = \int_u^{u+2/\sqrt{M}} f"(x)dx + \int_{u+2/\sqrt{M}}^t f"(x)dx$.
Comme $f"(x) \geq M \geq 0$, $f'(t) \geq \displaystyle\int_u^{u+2/\sqrt{M}} Mdx = M\frac{2}{\sqrt{M}} = 2\sqrt{M}$.

11. Sur l'intervalle $[u+2\sqrt{M}, v]$ on peut appliquer le résultat de la question 9. avec $K = \sqrt{2}M$. D'où $\displaystyle\left|\int_{u+2/\sqrt{M}}^v \cos f(t)dt\right| \leq \frac{4}{2\sqrt{M}} = \frac{2}{\sqrt{M}}$
De plus $\displaystyle\left|\int_u^{u+2/\sqrt{M}} \cos f(t)dt\right| \leq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} |\cos f(t)|dt \leq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} dt = \frac{2}{\sqrt{M}}$

$$\text{Par suite : } \left|\int_u^v \cos f(t)dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}}.$$

Remarque : si $u + 2\sqrt{M} \geq v$, il n'est pas nécessaire de couper l'intervalle en deux et le majorant est $\frac{2}{\sqrt{M}} \leq \frac{4}{\sqrt{M}}$.
On admettra que le résultat est identique lorsque $f'(v) \leq 0$.

12. On suppose que $f'(u)f(v) < 0$. Comme $f" > 0$ sur $[u,v]$, f' est strictement croissante, continue (f est c^2), sur $[u,v]$. Elle réalise une bijection de $[u,v]$ dans $J = f'([u,v])$. Comme $f'(u) < 0$ et $f'(v) > 0$, l'intervalle image contient 0. Du fait de la bijection, il existe un unique réel w de $]u,v[$ tel que $f'(w) = 0$.

On peut alors appliquer le résultat de la question 11. sur chacun des segments $[u,w]$ et $[w,v]$ et :

$$\left|\int_u^v \cos f(t)dt\right| = \left|\int_u^w \cos f(t)dt + \int_w^v \cos f(t)dt\right| \leq \left|\int_u^w \cos f(t)dt\right| + \left|\int_w^v \cos f(t)dt\right|.$$

$$\left|\int_u^v \cos f(t)dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}} + \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

Ce dernier majorant est donc valable dans tous les cas de figure.

Dans les questions 13 et 14 , ζ désigne un nombre réel, k un entier naturel et $J_{k,\zeta}$ la fonction définie par

$$J_{k,\zeta}(x) = \int_0^x \cos\left(\zeta t + k\beta t^3\right) dt,$$

où β est le nombre réel non nul défini après la question 7.

13. Soit $x \in [k^{-1/3}, \pi]$. Prenons $f(x) = \zeta x + k\beta x^3$, f est c^2 et $f"(x) = 6k\beta x$. Sur $[k^{-1/3}, \pi]$, $f"(x) \geq 6k\beta k^{-1/3} > 0$. On peut appliquer le résultat de la question 12.

$$\left|\int_{k^{-1/3}}^x \cos\left(\zeta t + k\beta t^3\right) dt\right| \leq \frac{8}{\sqrt{6\beta k^{2/3}}} = \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}.$$

14. Si $x \in [0, k^{-1/3}]$:
$$\left|\int_0^x \cos\left(\zeta t + k\beta t^3\right) dt\right| \leq \int_0^x \left|\cos(\zeta t + k\beta t^3)\right| dt \leq \int_0^x dt \leq x \leq k^{-1/3}$$
Si $x \in [k^{-1/3}, \pi]$:
$$\left|\int_0^x \cos\left(\zeta t + k\beta t^3\right) dt\right| \leq \left|\int_0^{k^{-1/3}} \cos\left(\zeta t + k\beta t^3\right) dt\right| + \left|\int_{k^{-1/3}}^x \cos\left(\zeta t + k\beta t^3\right) dt\right|$$
$$\left|\int_0^x \cos\left(\zeta t + k\beta t^3\right) dt\right| \leq k^{-1/3} + \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}$$
En prenant $C_1 = 1 + \dfrac{8}{\sqrt{6\beta}} > 0$, on a pour tout $x \in [0, \pi]$:
$$|J_{k,\zeta}(x)| \leq C_1 k^{-1/3}$$

On admet que l'on peut démontrer de la même manière qu'il existe une constante C_2, indépendante de k et ζ, telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation suivante :

$$\left|\int_0^x \sin\left(\zeta t + k\beta t^3\right) dt\right| \leq C_2 k^{-1/3} \qquad (1)$$

15. On sait que $b(x) = \exp\left(-\gamma x^4(1+\varepsilon(x))\right)$, ε fonction c^1 de limite 0 en 0.
$\gamma > 0$ donc $|b(x)| = \exp\left(-\gamma x^4\right)\left|\exp\left(-\gamma\varepsilon(x)x^4\right)\right|$.

Pour tout z de $\mathbb{C}$, $|e^z| \leq e^{|z|}$ donc $|b(x)| \leq e^{-\gamma x^4} e^{\gamma x^4|\varepsilon(x)|}$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} |\varepsilon(x)| = 0$ il existe $r > 0$ tel que, si $x \in [0, r]$, $|\varepsilon(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
Pour $x \in [0, r]$, $|b(x)| \leq e^{-\frac{\gamma}{2}x^4}$.
Sur $[r, \pi]$, $|b(x)| = |a(x)| < 1$. Par continuité, l'image du segment $[r, \pi]$ par $|b|$ est un segment $[m_1, m_2]$ avec $0 \leq m_2 < 1$.
Soit $c_1 = \dfrac{-\ln m_2}{\pi^4} > 0$. Pour tout x de $[r, \pi]$:

$$|b(x)| \leq m_2 = e^{-c_1\pi^4} \leq e^{-c_1 x^4}$$

Soit $\lambda = \min\left(\dfrac{\gamma}{2}, c_1\right) < 0$. En utilisant les deux inégalités précédentes et la parité de la fonction $|a| = |b|$ on a, pour tout x de $[-\pi, \pi]$:

$$|b(x)| \leq \exp(-\lambda x^4).$$

16. $b(x) = \exp\left(-\gamma x^4(1+\varepsilon(x))\right)$; $b'(x) = b(x)\left(-4\gamma x^3(1+\varepsilon(x)) - \gamma x^4\varepsilon'(x)\right)$.
$|b'(x)| \leq 1 \times |x^3|\,(4\gamma(1+|\varepsilon(x)|) + \gamma|x||\varepsilon'(x)|)$.
Par hypothèse la fonction $x \mapsto (4\gamma(1+|\varepsilon(x)|) + \gamma|x||\varepsilon'(x)|)$ est continue, donc bornée sur $[-\pi, \pi]$. Il existe une constante $C_3 > 0$ telle $\forall x \in [-\pi, \pi]$:

$$|b'(x)| \leq C_3|x^3|.$$

17. $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\alpha k+n}(x)(b(x))^k dx = \left[J'_{k,\alpha k+n}(x)(b(x))^k\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} kJ_{k,\alpha k+n}(x)(b(x))^{k-1}b'(x)dx$$

En utilisant les majorations obtenues dans les questions précédentes :

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\alpha k+n}(x)(b(x))^k dx\right| \leq 2C_1k^{-1/3} \times 1 + kC_1k^{-1/3}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-\lambda x^4}\right)^{k-1} C_3|x^3|dx$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\alpha k+n}(x)(b(x))^k dx\right| \leq 2C_1k^{-1/3} + 2C_1C_3k^{2/3}\int_0^{\pi} e^{-\lambda(k-1)x^4}x^3dx$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda(k-1)x^4}x^3dx = -\frac{e^{-\lambda(k-1)\pi^4}-1}{4\lambda(k-1)} \leq \frac{1}{4\lambda(k-1)} \leq \frac{1}{2\lambda k} \text{ si } k \geq 2$$

D'où une constante $C_4 > 0$ telle que pour tout entier non nul k et pour tout entier relatif n , on ait l'inégalité :

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\alpha k+n}(x)(b(x))^k dx\right| \leq C_4k^{-1/3}.$$

Comme $J'_{k,\zeta}(x) = \cos(\zeta x + k\beta x^3)$ on a montré que

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \cos((\alpha k + n)x + k\beta x^3)(x)(b(x))^k dx\right| \leq C_4 k^{-1/3}.$$

Même résultat avec $-\alpha - kn$ car ζ n'intervient pas.

On démontrerait un résultat identique avec $\left|\int_{-\pi}^{\pi} \sin((-\alpha k - n)x + k\beta x^3)(x)(b(x))^k dx\right|$

18. $a_{k,n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (a(x))^k e^{-inx} dx = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} d(x)^k b(x)^k e^{-inx} dx$
$a_{k,n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(-k\alpha x + k\beta x^3 - nx\right)} b(x)^k dx.$
$a_{k,n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(-k\alpha x + k\beta x^3 - nx\right) b(x)^k dx + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(-k\alpha x + k\beta x^3 - nx\right) b(x)^k dx$
On retrouve les expressions précédentes et :

$$|a_{k,n}| \leq C_5 k^{-1/3}$$

avec $C_5 > 0$ indépendante de k et n .

On admet désormais l'existence d'une constante $C_6 > 0$ telle que, pour tout entier k non nul,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|^{2k} dx \geq C_6 k^{-1/4}.$$

19. La relation de Parseval appliquée à a^k donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|^2 = \sum_{n=-k}^{k} [a_{k,n}|^2 \geq C_6 k^{-1/4}$$

Si $a_{k,n} \neq 0$ alors $|a_{k,n}| = \dfrac{|a_{k,n}|^2}{|a_{k,n}|} \geq \dfrac{|a_{k,n}|^2}{C_5 k^{-1/3}}$
La minoration reste vraie si $a_{k,n} = 0$ donc :

$$||a^k|| = \sum_{n=-k}^{k} |a_{k,n}| \geq \sum_{k=-n}^{n} \frac{|a_{k,n}|^2}{C_5 k^{-1/3}} \geq \frac{C_6 k^{-1/4}}{C_5 k^{-1/3}} = C_7 k^{1/12}$$

Avec $C_7 = C_6/C_5 > 0$. On a bien, pour tout entier k :

$$||a^k|| \geq C_7 k^{1/12}.$$

La fonction a n'est pas stable !

Fin du corrigé